MVE365, Problemlösning, vt2022, Lektion 1.2

Vi kommer att försöka klara oss med ABS 1)–4) så länge som möjligt (dvs utan parallellaxiomet). I praktiken innebär detta att våra definitioner och bevis inte får bygga på:

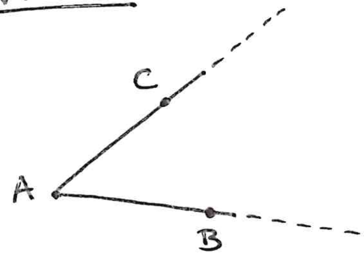
I. Att vinkelsumman i en Δ är 180° (= två räta = 2R)

II. Likformighet, III. Area.

Avsnitt 4.3 i OH visar att ABS 1)–4) är tillräckliga för att ge mening åt längden, $|AB|$, av en sträcka AB, på ett motsägelsefritt sätt som beter sig så som vi är vana vid.

Avsnitt 4.4 gör samma sak för begreppet vinkel.

För vinklar har vi följande begrepp:

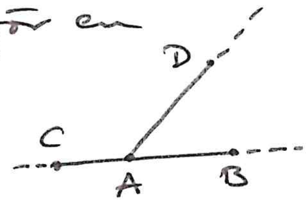


Definition: (i) Strålarna AB och AC kallas vinkelben.

(ii) Punkten A kallas vinkelspets.

(iii) Om AB och AC inte är motsatta (dvs ligger på en linje) ligger en av vinklarna i ett halvplan. Denna kallas vinkeln BAC eller CAB eller A, och betecknas $\measuredangle BAC$ ($\wedge BAC$ i OH) $\measuredangle CAB$ eller $\measuredangle A$.

(iv) Den linje som delar $\measuredangle A$ mitt itu kallas för en bisektris till $\measuredangle A$.

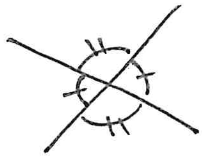


(v) Vinklarna $\measuredangle BAD$ och $\measuredangle CAD$ kallas sidovinklar.

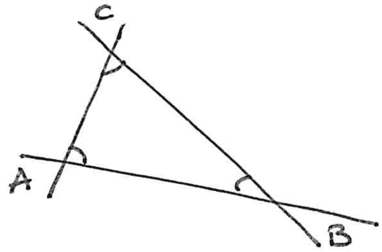
(vi) En vinkel som är lika stor som sin sidovinkel kallas rät, skrivs R i OH.

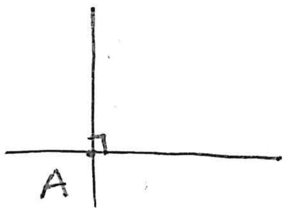
(vii) En vinkel som är mindre / större än en rät vinkel kallas spetsig / trubbig

(viii) Då två linjer skär varandra bildas 4 vinklar. De vinklar som inte har något gemensamt vinkelben kallas <u>vertikalvinklar</u>. Två vertikalvinklar är alltid lika stora (samma sidovinkel)



(ix) En triangel ABC skrivs $\triangle ABC$. Vinklarna vid A, B och C kallas triangelns <u>innervinklar</u> (oftast bara triangelns vinklar) och sidovinklarna till dessa för triangelns <u>yttervinklar</u>.





(x) Två linjer som skär varandra under räta vinklar sägs vara <u>normaler</u> till varandra. Skärningspunkten A kallas ibland <u>fotpunkt</u>.

<u>Kongruenta trianglar i absolut (neutral) geometri</u>: (4.5)

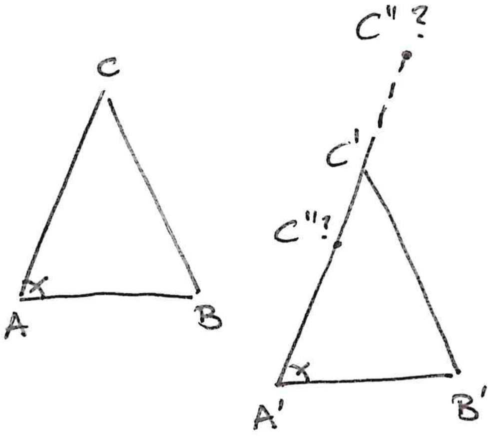
Med begreppen längd & vinkel och tillhörande def. till vårt förfogande, kan vi nu visa grundläggande satser om trianglar. Det enda som saknas är:

<u>Definition</u>: Vi säger att $\triangle ABC$ är <u>kongruent</u> med $\triangle A'B'C'$ om $\triangle ABC$ m.h.a. en KT kan förflyttas så att A flyttas till A', B till B' och C till C'. Detta skrivs $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

<u>Anm.</u>: Notera att för kongruenta trianglar är ordningen mellan hörnen viktig.

Euklides bevisade 3 satser om kongruenta trianglar, som kallas kongruensfall 1-3 (KF1-3) sedan dess, efter den ordning som de förekommer i Elementa.

Sats 1: (KF1, s-v-s) Givet $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ där $|AB| = |A'B'|$
$|AC| = |A'C'|$ och $\measuredangle A = \measuredangle A'$, så är $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.



Bevis: "Lyft" $\triangle ABC$ s.a. $A \curvearrowright A'' = A'$,

$B \curvearrowright B'' = \{|AB| = |A'B'|\} = B'$ & $C \curvearrowright C''$

på samma sida (p.s.s.) om $A'B'$ som C'.

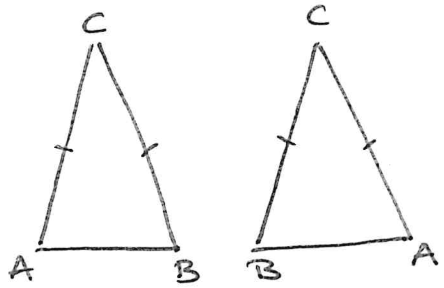
$\measuredangle A = \measuredangle A' \Rightarrow C'' \in$ strålen $A'C'$

$|A'C''| \overset{A'=A''}{=} |A''C''| = |AC| \overset{\text{givet}}{=} |A'C'|$ och $C', C'' \in$ strålen $A'C'$

$\Rightarrow C'' = C' \Rightarrow \triangle A''B''C'' = \triangle A'B'C' \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ∎

En omedelbar konsekvens är:

Sats 2: (Basvinkelsatsen) Givet $\triangle ABC$ med $|AC| = |BC|$
så är $\measuredangle A = \measuredangle B$.

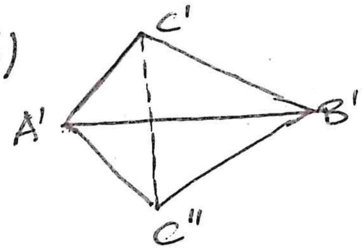


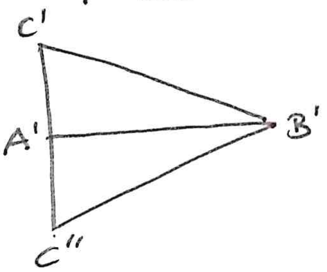
Bevis: Tänk på två spegelvända $\triangle$:
$\triangle ABC$ och $\triangle BAC$. Då gäller att:

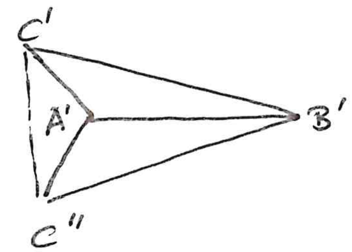
$$\left.\begin{aligned} |AC| &= |BC| \\ |BC| &= |AC| \\ \measuredangle C &= \measuredangle C \end{aligned}\right\} \text{(KF1, s-v-s)} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle BAC \text{ så } \measuredangle A = \measuredangle B$$ ∎

Sats 3: (KF2, s-s-s) Givet $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ där $|AB| = |A'B'|$,
$|AC| = |A'C'|$ och $|BC| = |B'C'|$, så är $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Bevis: "Lyft" $\triangle ABC$ så att $A \curvearrowright A'' = A'$, $B \curvearrowright B'' = B'$ samt
$C \curvearrowright C''$ där C'' och C' på <u>olika</u> sidor om $A'B'$. Tre fall:

1)


2)


3)


2) $\triangle B'C'C''$ likbent då $|B'C'| = |B'C''| \xrightarrow{\text{Sats 2}} \measuredangle B'C'C'' = \measuredangle B'C''C'$

$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} KF1 \\ s-v-s \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle A'B'C' \cong \triangle A'B'C'' \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

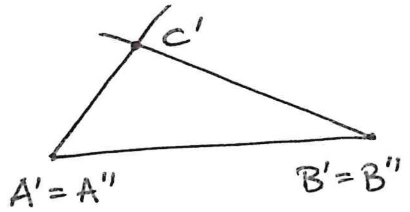
1), 3) Drag sträckan $C'C''$. $\triangle A'C'C''$ likbent $\xrightarrow{\text{Sats 2}} \measuredangle A'C'C'' = \measuredangle A'C''C'$

$\triangle B'C'C''$ likbent $\Rightarrow \measuredangle B'C'C'' = \measuredangle B'C''C' \Rightarrow \left(\begin{matrix} \text{1) summa} \\ \text{3) differens} \end{matrix} \right)$

$\Rightarrow \measuredangle A'C'B' = \measuredangle A'C''B' \xrightarrow{\substack{KF1 \\ s-v-s}} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ■

Sats 4: ($KF3$, v-s-v) Givet $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, $\measuredangle A = \measuredangle A'$, $|AB| = |A'B'|$ och $\measuredangle B = \measuredangle B'$, så är $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Bevis: "Lyft" $A \curvearrowright A'' = A'$, $B \curvearrowright B'' = B'$ och $C \curvearrowright C''$ p.s.s. om $A'B'$ som C'



$\left. \begin{matrix} \measuredangle A'' = \measuredangle A = \measuredangle A' \Rightarrow C'' \in \text{strålen } A'C' \\ \measuredangle B'' = \measuredangle B = \measuredangle B' \Rightarrow C'' \in \text{strålen } B'C' \end{matrix} \right\} \Rightarrow$

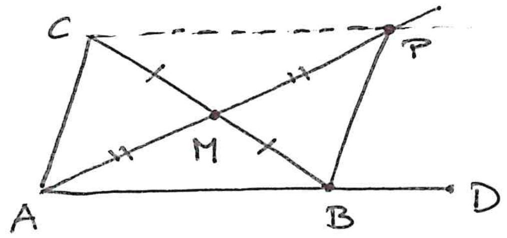
$\Rightarrow C'' \in$ skärningspkt. mellan strålarna $\Rightarrow C'' = C' \Rightarrow$

$\Rightarrow |A'C'| = |A'C''| \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} KF1 \\ s-v-s \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ■

Att fundera på till nästa gång: Finns det fler kongruensfall? s-s-v? v-v-s? v-v-v? ← Nej!

Sats 5: (Yttervinkelsatsen i neutral geom.) I en $\triangle$ är varje yttervinkel större än var och en av motstående innervinklar.

Bevis: Antag $\triangle ABC$ och låt D ligga på A:s förlängning över B. Kommer att visa:



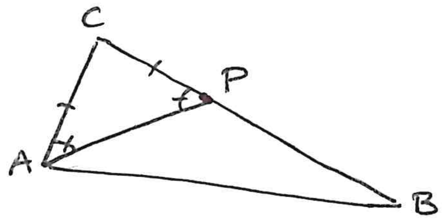
$\angle DBC > \angle C$ ($\angle DBC > \angle A$ visas analogt)

Låt M vara mittpunkt på BC och drag strålen AM. Låt $P \in$ strålen AM s.a. $|AM| = |MP|$. Drag PB. Då är

$\triangle AMC \cong \triangle PMB$ enl. s-v-s ty
$|AM| = |MP|$
$\angle AMC = \angle BMP$ (vertikalvinklar)
$|BM| = |MC|$

$\Rightarrow \angle PBM = \angle C$. Men $\angle PBM < \angle DBM$ då PB innuti $\angle DBM$. $\therefore \angle C < \angle DBC$ ∎

<u>Sats 6</u>: I en $\triangle$ är vinkeln mot en större sida större än vinkeln mot en mindre.



<u>Bevis</u>: Vill visa: $|BC| > |AC| \Rightarrow$
$\rightarrow \angle A > \angle B$

Välj $P \in BC$ s.a. $|CP| = |CA|$ och drag AP.

$\triangle APC$ likbent $\xRightarrow{\text{Sats 2}}$ $\angle CAP = \angle CPA$.

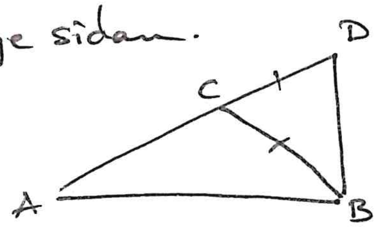
Klart att $\angle BAC > \angle CAP$ då AP innuti $\angle BAC$.

Sats 5 $\Rightarrow$ $\angle CPA > \angle B$

$\therefore \angle A = \angle BAC > \angle CAP = \angle CPA > \angle B$ ∎

<u>Korollarium</u>: (Sats 7, Basvinkelsatsens omvändning) Om två vinklar i en $\triangle$ är lika så är motstående sidor lika.

<u>Sats 8</u>: ($\triangle$-olikheten) Summan av längderna av två sidor i en $\triangle$ är alltid större än längden av den tredje sidan.



<u>Bevis</u>: Antag att vi vill visa:

$|AC| + |BC| > |AB|$ $(*)$

Välj $D \in$ strålen AC s.a. $|CD| = |CB|$. Då

$(*) \iff |AD| > |AB| \underset{\text{(Fusk :))}}{\overset{\text{Sats 6}}{\iff}} \measuredangle ABD > \measuredangle ADB$

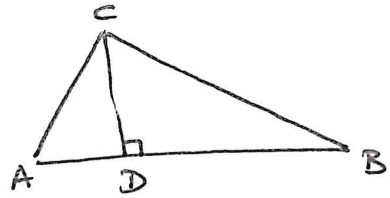
Men $\measuredangle ADB \overset{\text{Sats 2}}{=} \measuredangle DBC < \measuredangle ABD$ då CB inuti $\measuredangle ABD$ ■

<u>Sats 9</u>: Minst två av vinklarna i en Δ måste vara spetsiga.

<u>Bevis</u>: Tre fall: 1) Alla 3 vinklar spetsiga klart!

2)–3): En $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{rät}}{\text{trubbig}}$ vinkel. Då blir yttervinkeln till denna $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{rät}}{\text{spetsig}}$ $\overset{\text{Sats 5}}{\Longrightarrow}$ de två återstående innervinklarna är mindre än en $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{rät}}{\text{spetsig}}$ vinkel $\Rightarrow$ Två spetsiga vinklar ■

<u>Sats 10</u>: Antag ΔABC och att $\measuredangle A, \measuredangle B$ spetsiga (sats 9)



Drag normal till AB genom C och kalla fotpunkten D. Beviset klart om vi kan visa att $D \in AB$ (dvs D mellan A och B)

Antag motsatsen, säg $B \in AD$. Då $\measuredangle ABC$ yttervinkel för $\measuredangle BDC$ = rät $\overset{\text{Sats 5}}{\Longrightarrow}$ $\measuredangle ABC$ trubbig ↯ motsägelse!

$\therefore D \in AB$ ■