MVE365, Problemlösning, vt2022, Lektion 1.3

Parallella linjer och vinkelsumman i trianglar: (OH: 4.6)

Vi har hittills hållit oss inom den neutrala geometrin, dvs undvikt resonemang som bygger på parallellaxiomet.

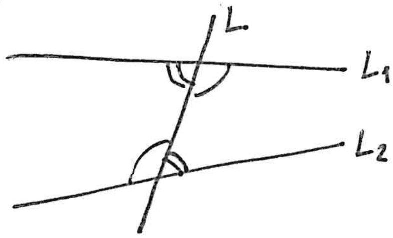
Mer konkret har vi inte använt argument som bygger på:

I. Vinkelsumma $\Delta = 2R$, II. Likformighet, III. Area

Idag ska vi studera på vilket sätt detta axiom är centralt, och lite om dess historia. Men vi börjar med några grundläggande def. och satser.

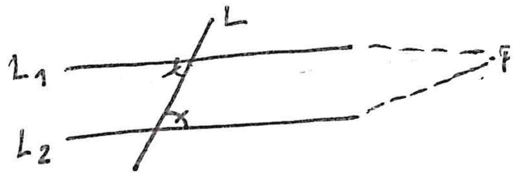
Definition: (i) Två linjer som inte har någon skärningspunkt sägs vara parallella, vi skriver detta $\parallel$ ($L_1 \parallel L_2$)

(ii) Då två linjer, L_1 & L_2, skärs av en tredje linje, L, kallas denna linje L för transversal. Det bildas 4 vinklar vid vardera skärningspunkt. Två av dessa, som ligger mellan L_1 och L_2 och på olika sidor om L, kallas alternatvinklar.



Utan parallellaxiomet kan vi visa följande satser om parallella linjer och vinkelsumman i en Δ.

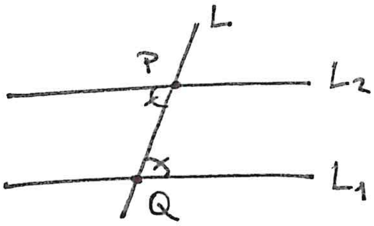
Sats 11: Om två linjer L_1 & L_2 har en transversal L med lika alternatvinklar, så är de parallella.



Bevis: Antag motsatsen: L_1 & L_2 skär varandra i P. Då får vi en Δ där en yttervinkel = en av de motstående innervinklarna $\lightning$ Går ej!

$\therefore L_1 \parallel L_2$ ∎

Sats 12: Genom en punkt P utanför en linje L_1, kan man dra minst en linje L_2 parallell med L_1.

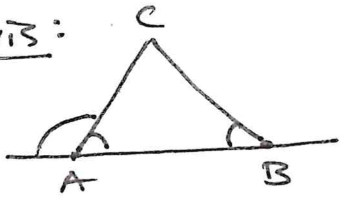


Bevis: Välj $Q \in L_1$ och dra linjen L genom PQ. Drag nu L_2 genom P så att alternatvinklarna då L skär L_1 & L_2 blir samma.

Då är $L_1 \parallel L_2$ enligt sats 11 ∎

Sats 13: (Euklides) Summan av två vinklar i en Δ är alltid mindre än 2 räta.

Bevis:



$$\measuredangle A + \measuredangle B \overset{\text{sats 5}}{<} \measuredangle A + \text{yttervinkel vid } A =$$

$$= \text{summa av två sidovinklar} = 2R \quad ∎$$

Precis som vi undviker även Euklides in i det längsta med att använda parallellaxiomet. Det sker först då han visar att vinkelsumman $\Delta = 2R$.

Just för att han undviker det så länge, och för att det är så komplicerat jämfört med de andra 4 axiomen, drog detta åt sig mycket uppmärksamhet genom åren.

Många försök gjordes för att visa att det är överflödigt och följer ur de andra axiomen. Den som kom "närmast" var Saccheri (1667-1733). Han försökte visa att vinkelsumman i en Δ är $2R$ utan att använda parallellaxiomet, med två motsägelsebevis. Den ena av dessa är korrekt och är:

Sats 14: (Saccheri) Summan av vinklarna i en Δ är $\leq 2R$

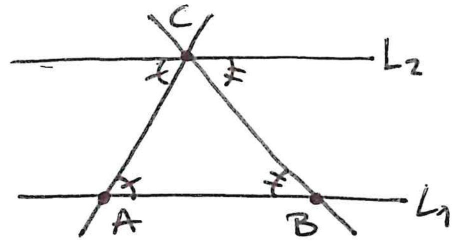
Bevis: Ingår ej! (Men läs gärna själva)

Det andra "visade" att vinkelsumman är $\geq 2R$. Detta bevis visade sig dock vara inkorrekt; det stödjer sig på en egenskap som är ekvivalent med parallellaxiomet.

Faktum är att man kan visa att:

Parallellaxiomet $\Longleftrightarrow$ Vinkelsumman i $\Delta = 2R$

$\Rightarrow$: (Sats 15) Om det givet en linje L och en punkt $P \notin L$ endast går en linje $\parallel$ med L, så är vinkelsumman i varje triangel $= 2R$.



Bevis: Drag linjer genom alla par av hörn i en godtycklig ΔABC.

Om $AB \subset L_1$ så kommer $C \notin L_1$ och alltså går det endast en linje L_2 genom C med $L_1 \parallel L_2$. Då L_2 är unik, kommer alternatvinklarna till $\measuredangle A$ och $\measuredangle B$ båda att ha L_2 som vinkelben.

$$\therefore \measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 2R \quad \blacksquare$$

Sats 16–18 visar omvändningen:

Sats 16: Om vinkelsumman i någon Δ är $2R$, så gäller detta alla Δ.

Sats 17: Teknisk hjälpsats

Sats 18: Om vinkelsumman för Δ är $2R$, finns det för varje punkt P utanför en linje L, endast en linje genom P som är $\parallel$ med L (dvs $\Leftarrow$)

Läs gärna bevisen för dessa satser själva!

Det här besvarar den i hundratals (tusentals) år öppna

Frågan: Behövs parallellaxiomet för att bevisa alla satserna i Elementa? (Svar: Ja!)

Däremot kvarstår frågan: Vad händer om vi struntar i parallellaxiomet och bara håller stenhårt på de 4 första axiomen (i vårt fall ABS 1)–4))?

Mer precist: Går det att bygga upp en logiskt konsekvent geom. teori, endast utifrån ABS 1)–4)?

Svaret är ja och teorin är känd under namnet:

Icke-enklidisk geometri: (OH: 4.8, 4.9, 4.11)

För att förstå idén bakom icke-enklidisk (I.E.) geometri är en sak central:

DET ÄR INTE AV GUD GIVET ATT RÄTA LINJER MÅSTE SE UT PÅ DET SÄTT SOM VI ALLTID HAR TÄNKT PÅ DEM!

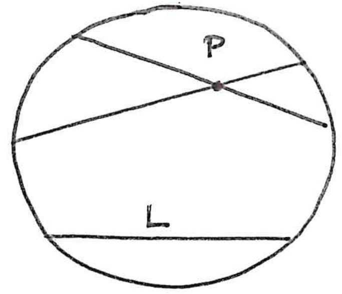
Kom ihåg att linjer (tillsammans med punkter & KT) tillhör de grundläggande begreppen, och därför aldrig definieras.

I.E. geometri uppstår från det faktum att man kan tänka sig dessa grundläggande begrepp definierade på andra sätt än de "vanliga", men som samtidigt uppfyller ABS 1)–4) på ett logiskt konsekvent sätt.

Det förmodligen enklaste ex. på detta är Kleins modell (OH: 4.8). Den utgår från enhetscirkelskivan $\mathbb{E}$ i $\mathbb{R}^2$.

Med en I.E.-punkt menas en "vanlig" punkt i $\mathbb{E}$.

Med en I.E.-<u>linje</u> menas en s.k. korda i $\mathbb{E}$, dvs ett "vanligt" euklidiskt linjestycke som börjar och slutar på randen till $\mathbb{E}$.



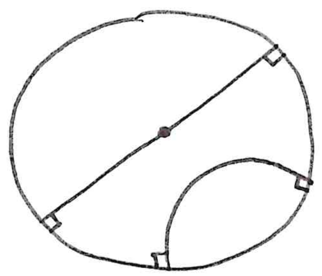
Det är då inte svårt att se att ABS 1)-3) är uppfyllda. Det är knepigare med KT och ABS 4) men även detta går att visa (det mesta av 4.8 ägnas åt just KT och ABS 4)).

Detta innebär att Sats 1-14 alla gäller även för dessa I.E.-linjer, I.E.-trianglar, I.E.-KT osv. Alla bevisen går igenom copy-paste.

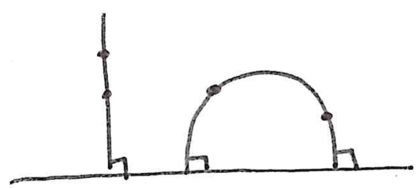
Däremot är det enkelt att se att parallellaxiomet <u>inte</u> är uppfyllt här: givet en I.E.-linje L och en I.E.-punkt $P \notin L$, finns det ∞-många I.E.-linjer som går genom P och som inte skär L, dvs ∞-många I.E.-linjer som går genom P och är parallella med L.

Två andra, vanliga, I.E.-modeller:

I. Poincaré-disken



II. Poincaré-halvplanet



Även i dessa modeller är det enkelt att visa ABS 1)-3) medan ABS 4) är lite knepigare. Sats 1-14 gäller därefter copy-paste, även här.

I.E.-geometri har en invecklad historia:

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)
Farkas Bolyai (1775-1856)
~1797

János Bolyai (1802-1860)

(Publicerade 1832)

Nikolai Lobachevsky (1792-1856)

(Publicerade 1829)