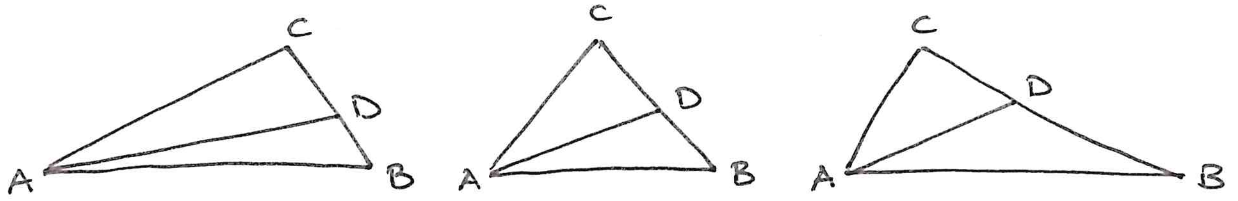
MVE365, Problemlösning, vt2022, Lektion 1.4

OH:44: Visa i absolut geometri att om i ΔABC vinkeln C är rät och D är en inre punkt på BC, så är $|AD| < |AB|$.

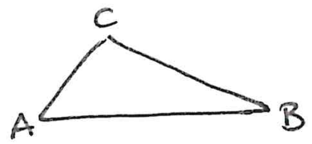
Bevis: Börja med att rita figur(er)!



Vet: $\measuredangle C = R$, Vill visa: $|AD| < |AB|$

Vilka satser har vi som relaterar vinklar och längder?

Jo, sats 6:



$|AC| < |BC| \Longleftrightarrow \measuredangle B < \measuredangle A$

I vårt fall: $|AD| < |AB| \overset{\text{sats 6}}{\Longleftrightarrow} \measuredangle B < \measuredangle ADB$

$\measuredangle ADB$ yttervinkel till $\measuredangle C = R \overset{\text{sats 5}}{\Longrightarrow} \measuredangle ADB > R \Rightarrow$

$\overset{\text{sats 9}}{\Longrightarrow} \measuredangle B$ och $\measuredangle BAD$ båda spetsiga

$\therefore \measuredangle B < \measuredangle ADB$ så $|AD| < |AB|$ enl. sats 6 ∎

Det återstår två potentiella kongruensfall: s-v-v & v-s-s

s-v-v är faktiskt Euklides variant av K.F. 3.

OH:42: (s-v-v) Visa att om för ΔABC och $\Delta A'B'C'$ gäller att $|AB| = |A'B'|$, $\measuredangle A = \measuredangle A'$ och $\measuredangle C = \measuredangle C'$, så är $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

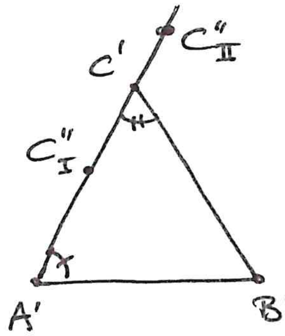
Bevis: "Lyft" $A \curvearrowright A'' = A'$, $B \curvearrowright B'' = B'$ och $C \curvearrowright C''$ p.s.s. om $A'B'$ som C'.

$\measuredangle A = \measuredangle A'$ så $C'' \in$ strålen $A'C'$

Antag att $C'' \neq C'$. Två fall:

I. C'' mellan A' och C'. Då $\measuredangle A'C''B'$ yttervinkel till $\measuredangle C' \overset{\text{Sats 5}}{\Longrightarrow} \measuredangle A'C''B' > \measuredangle C'$

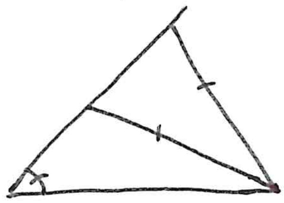
Men $\measuredangle A'C''B' = \measuredangle C \overset{\text{vet}}{=} \measuredangle C'$ ↯ Motsägelse!



II. C'' ej mellan A' och C'. Då $\measuredangle C'$ yttervinkel till $\measuredangle A'C''B' \overset{\text{sats 5}}{\Longrightarrow} \measuredangle C' > \measuredangle A'C''B' \overset{\text{vet}}{=} \measuredangle C$ ↯ Motsägelse!

$\therefore C'' = C'$ så $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ∎

För det sista möjliga fallet räcker dock inte informationen v-s-s. Vi kan nämligen ha två olika △ som båda uppfyller v-s-s. Vi måste lägga på ytterligare ett villkor. Resultatet är känt som det "fjärde kongruensfallet" och finns i Elementa, men visas där med likformighet.



<u>OH:43:</u> ("K.F.4", v-s-s) Visa att om för $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ gäller att $\measuredangle A = \measuredangle A'$, $|AB| = |A'B'|$, $|BC| = |B'C'|$ och $\underline{|BC| > |AB|}$ så är $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ("två sidor + vinkel mot större sidan")

<u>Bevis:</u> "Lyft" $A \rightsquigarrow A'' = A'$, $B \rightsquigarrow B'' = B'$ och $C \rightsquigarrow C''$ p.s.s. om $A'B'$ som C'. $\measuredangle A = \measuredangle A'$ så $C'' \in$ strålen $A'C'$

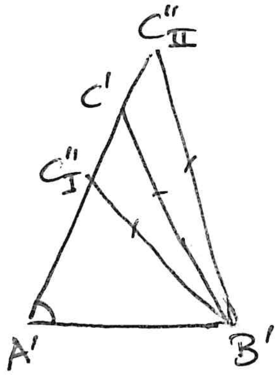
Antag att $C'' \neq C'$. Två fall:

I. C'' mellan A' och C'.

$|B'C''| = |B'C'| \overset{\text{sats 2}}{\Longrightarrow} \measuredangle B'C''C' = \measuredangle C'$

$\measuredangle B'C''C'$ yttervinkel till $\measuredangle A' \overset{\text{Sats 5}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \measuredangle B'C''C' > \measuredangle A'$



$\Rightarrow \measuredangle C' > \measuredangle A' \xRightarrow{\text{sats } 6} |A'B'| > |B'C'|$ ↯ Motsägelse!

II. C'' ej mellan A' och C'

$$\left.\begin{array}{l} |B'C''| = |B'C'| \xRightarrow{\text{sats } 2} \measuredangle B'C'C'' = \measuredangle C'' \\ \measuredangle B'C'C'' \text{ yttervinkel till } \measuredangle A' \xRightarrow{\text{sats } 5} \measuredangle B'C'C'' > \measuredangle A' \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \measuredangle C'' > \measuredangle A' \xRightarrow{\text{sats } 6} |A'B'| > |B'C''| = |B'C'|$ ↯ Motsägelse!

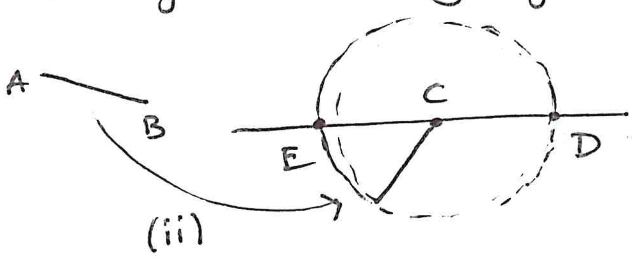
$\therefore C'' = C'$ så $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ∎

Övningarna hittills har varit "klassiska" geom.-övningar med tillägget att vi inte får använda parallellaxiomet. Det finns ytterligare en klass av klassiska geom.övningar, s.k. konstruktionsuppgifter. Dessa går ut på att endast m.h.a. passare och linjal (primé) göra olika geom. konstr. i Euklides anda. När väl en grundläggande geom.-konstr. har gjorts, kan denna användas utan bevis i efterföljande uppgifter. Vi har redan sett två sådana ex.:

(i) Liksidig $\triangle$ (givet en sida)

(ii) Flytta en given sträcka till en given punkt.

Det är en omedelbar konsekvens av (ii) att vi kan avsätta sträckor, dvs givet AB och pkt. C på en linje L, kan vi ta fram en sträcka av längd $|AB|$ längs L med utgångspunkt i C.



Mer allmänt har vi alltså grundkonstruktionerna:

(i) Liksidig △

(ii) Avsätta sträckor

Lösn. av konstr. uppg. består av 4 steg:

1. Analys: Analysera problemet och se hur en lösning skulle kunna vara möjlig. Rita figur, jobba bakåt, klura.

 (Problemlösn.-strategier: Working backwards (kap. 2)
 Drawing a picture (kap. 7), för att prata P-K språk)

 (1. Underst. the problem, 2. Devising the plan, Polya-språk)

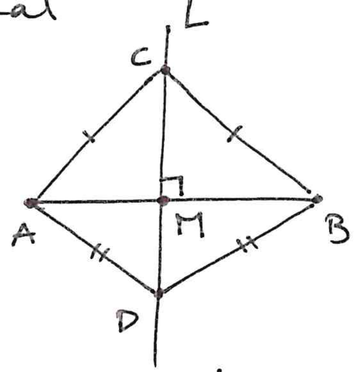
2. Konstruktion: Genomför konstruktionen (Steg 3 i Polya)

3. Bevis: Visa att din konstr. verkligen löser uppgiften

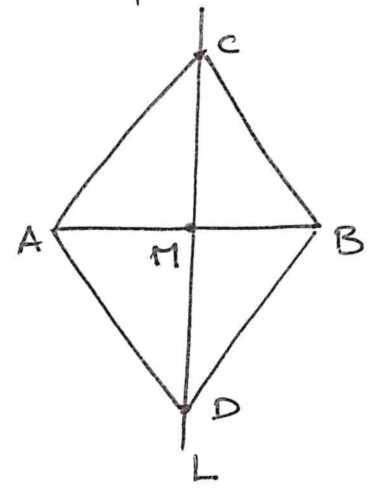
4. Utredning: Se tillbaka på problemet och lösningen. Kolla extremfall (Steg 4 i Polya, Looking back)

PPG 12: Konstruera en sträckas

 (a) mittpunkt (b) mittpunktsnormal



Lösn.: Analys: Söker M i (a) och L i (b).
 Givet L får vi M. L ges av C och D.
 △ABC och △ABD båda likbenta ⇒
 → Klart om vi kan konstr. två likbenta △ med AB som bas.
 Vi har grundkonstr. (i) liksidig △
 ∴ Konstr. av C och D möjlig!



Konstruktion: Låt sträckan vara AB, och

konstr. två liksidiga Δ, ΔABC och ΔABD, med AB som sida.
Låt L vara linjen genom C och D. Kalla skärningen av L och AB för M. Då är:

(a) M sträckan AB:s mittpunkt
(b) L — " — normallinje

<u>Bevis</u>: Då $|AC| = |BC|$, $|AD| = |BD|$ och C är gemensam är $\Delta ACD \cong \Delta BCD$ enl. KF2 (s-s-s). I synnerhet är $\measuredangle ACM = \measuredangle BCM$ så $\Delta ACM \cong \Delta BCM$ enl. KF1 (s-v-s). Alltså är $|AM| = |BM|$ så M är mittpunkten på AB.

Detta bevisar (a).

Vidare följer av $\Delta ACM \cong \Delta BCM$ att $\measuredangle AMC = \measuredangle BMC$. Då dessa är sidovinklar följer (per def.) att båda är räta. Alltså är L en normallinje till AB som går genom mittpunkten. Detta bevisar (b). $\blacksquare$

<u>Utredning</u>: Det spelar ingen roll för konstr. hur lång sträckan är (så länge $< \infty$). Då $|AB| \to 0$ sammanfaller A, B och M.

Vi har med detta utökat våra grundkonstr. med:

(iii) Mittpunkt på en sträcka
(iii) Mittpunktsnormal.

Läs Polya till nästa gång!