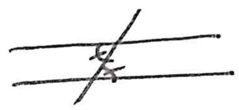
MVE365, Problemlösning, vt2022, Lektion 2.1

Förra gången såg vi att icke-euklidiska geometrier är möjliga. Från och med nu kommer vi att utgå från att parallellaxiomet är uppfyllt, dvs att vi har:

Euklidisk geometri: likformighet & Pyth. sats: (OH: 4.7)

Sats 19: Om två parallella linjer skärs av en transversal blir alternatvinklarna lika stora.



Bevis: Följer direkt av parallellaxiomet och Sats 11 (lika alt. vinklar $\Rightarrow$ parallella) för om det bara finns en parallell linje, så måste det vara den med lika alternatvinklar. ■

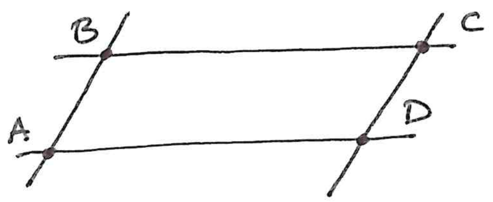
Sats 20: Om två olika linjer båda är parallella med en tredje linje, så är de sinsemellan parallella.

Bevis: Antag att $L_1 \parallel L_3$ och $L_2 \parallel L_3$.

Vill visa att $L_1 \parallel L_2$. Antag motsatsen. Då skär L_1 och L_2 varandra i någon punkt P $\Rightarrow$

$\Rightarrow P \notin L_3$ men genom P går två olika linjer parallella med L_3 ↯ Motsägelse mot parallellaxiomet.

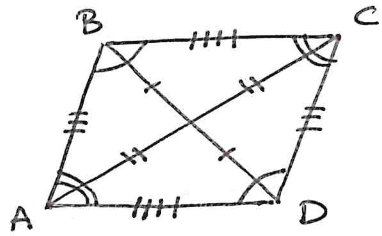
$\therefore L_1 \parallel L_2$ ■



Definition: Om två sinsemellan parallella linjer skär två andra sinsemellan parallella linjer, uppstår en fyrhörning som kallas en parallellogram.

($\therefore AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$)

Sats: (Ekv. def. av parallellogram) ABCD parallellogram om och endast om:



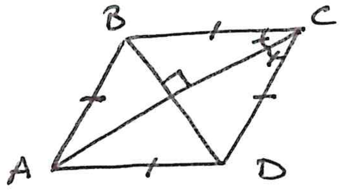
I. $|AB| = |CD|$, $|BC| = |AD|$ (Sats 21 : OH)

II. $\measuredangle A = \measuredangle C$, $\measuredangle B = \measuredangle D$

III. diagonalerna skär varandra på mitten.

IV. summan av varje par av närliggande vinklar = 2R

V. $AB \parallel CD$, $|AB| = |CD|$.



En parallellogram ABCD är en romb om:

1) $|AB| = |BC|$ ← Brukar tas som definition

2) $AC \perp BD$ ← vinkelrät

3) $\measuredangle ACB = \measuredangle ACD$

} Ekv. def. (måste visas!)

Definition: Två trianglar $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ sägs vara likformiga om:

(i) $\measuredangle A = \measuredangle A'$, $\measuredangle B = \measuredangle B'$, $\measuredangle C = \measuredangle C'$

(ii) $\dfrac{|AB|}{|A'B'|} = \dfrac{|AC|}{|A'C'|} = \dfrac{|BC|}{|B'C'|}$

Vi skriver detta: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

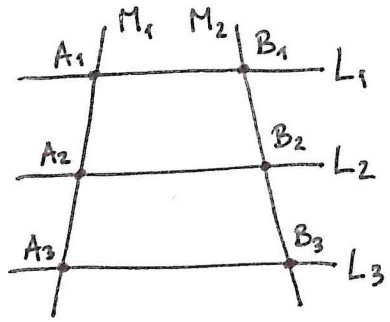
Vi är endast intresserade av $\triangle$ men likformighet kan def. mer allmänt och avser figurer som har samma form men är olika stora.

För $\triangle$ finns 3 s.k. likformighetsfall svarande mot de 3 första kongruensfallen. Bevisen för dessa bygger på två närliggande satser om likformighet:

Sats 22: (Transversalsatsen) Givet tre parallella linjer $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ och två transversaler M_1 och M_2, med skärningspunkter enl. figuren, så gäller att:

$$\frac{|A_1A_2|}{|B_1B_2|} = \frac{|A_2A_3|}{|B_2B_3|} \left(= \frac{|A_1A_3|}{|B_1B_3|} \right)$$

följer direkt ur första =

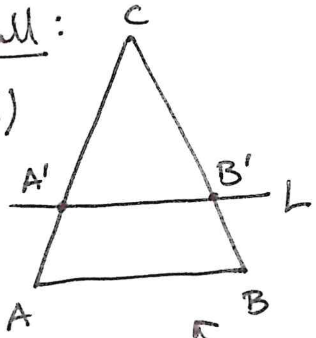


Beviset ingår ej!

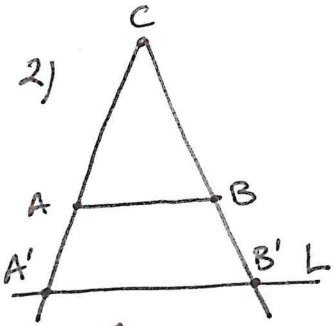
<u>Sats 23</u>: (Topptriangelsatsen) Givet $\triangle ABC$ och $L \parallel AB$ låt $\{A'\} = L \cap$ linjen AC och $\{B'\} = L \cap$ linjen BC. Då är $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C$.

<u>Tre fall</u>:

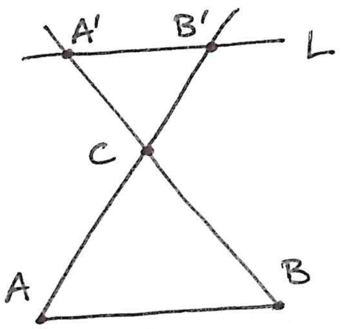
1)



2)



3)



typ samma

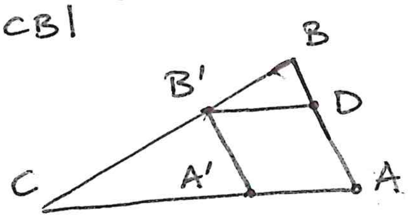
visas enl. samma princip

<u>Bevis av 1)</u>: (i) Samma vinklar: $\measuredangle C = \measuredangle C$ (duh!)

$L \parallel AB \Rightarrow \measuredangle A =$ alternatvinkel vid $A' = \{$vertikalvinkla$\} = \measuredangle A'$

På samma sätt: $\measuredangle B = \measuredangle B'$.

(ii) Samma förhållanden: $\frac{|CA'|}{|CA|} = \frac{|CB'|}{|CB|}$ enl. transversalsatsen



Återstår: $\frac{|A'B'|}{|AB|} \overset{?}{=} \frac{|CB'|}{|CB|}$

Drag $B'D \parallel AC$, $D \in AB$

$$\left.\begin{array}{l} A'B' \parallel AD \\ B'D \parallel A'A \end{array}\right\} \Rightarrow A'B'DA \text{ parallellogram} \Rightarrow |A'B'| = |AD|$$

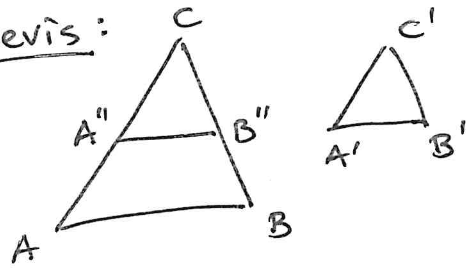
Transversalsatsen "på andra ledden": $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|CB'|}{|CB|} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{|A'B'| = |AD|\} \Leftrightarrow \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|CB'|}{|CB|}$ ■

Sats 24: (LF1, s-v-s) Givet $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ där $\angle C = \angle C'$

och $\dfrac{|BC|}{|B'C'|} = \dfrac{|AC|}{|A'C'|}$ (*) så är $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Bevis:



Avsätt $A'' \in$ strålen AC så att $|A''C| = |A'C'|$

Drag $A''B'' \parallel AB$ där $B'' \in$ strålen BC

Då är $\triangle A''B''C \sim \triangle ABC$ enl. topp$\triangle$satsen

$\Longrightarrow$ Räcker att visa att $\triangle A''B''C \sim \triangle A'B'C'$

Vet att: $\dfrac{|AC|}{|A''C|} = \dfrac{|BC|}{|B''C|}$ och $|A''C| = |A'C'| \Longrightarrow \dfrac{|AC|}{|A'C'|} = \dfrac{|BC|}{|B''C|}$

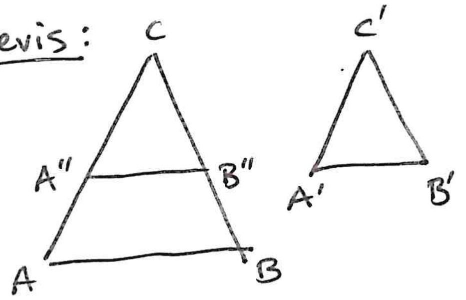
$$\overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|BC|}{|B''C|} \Longleftrightarrow |B'C'| = |B''C|$$

$$\therefore |A''C| = |A'C'|,\ \angle C = \angle C',\ |B''C| = |B'C'| \xRightarrow[\text{s-v-s}]{\text{KF1}} \triangle A''B''C \cong \triangle A'B'C' \quad \blacksquare$$

Sats 25: (LF2, s-s-s) Givet $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ där

(*) $\dfrac{|AB|}{|A'B'|} = \dfrac{|AC|}{|A'C'|} = \dfrac{|BC|}{|B'C'|}$ så är $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Bevis:



Konstr. $\triangle A''B''C$ som i Sats 24, dvs

$\underset{(**)}{|A''C| = |A'C'|}$, $AB \parallel A''B''$, $B'' \in$ strålen BC

Topptriangelsatsen: $\triangle ABC \sim \triangle A''B''C$

$$\Longleftrightarrow \frac{|AB|}{|A''B''|} = \frac{|AC|}{|A''C|} = \frac{|BC|}{|B''C|}$$

Vill återigen visa att $\triangle A''B''C \cong \triangle A'B'C'$

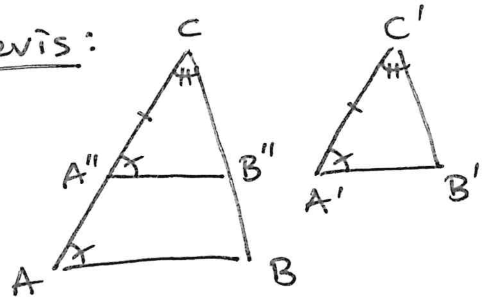
$$\frac{|AB|}{|A''B''|} = \frac{|AC|}{|A''C|} \overset{(**)}{\Longleftrightarrow} \frac{|AB|}{|A''B''|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} |A'B'| = |A''B''|$$

På samma sätt: $\dfrac{|AC|}{|A''C|} = \dfrac{|BC|}{|B''C|} \Longleftrightarrow \ldots \Longleftrightarrow |B'C'| = |B''C|$

KF2. (s-s-s) : $\triangle A''B''C \cong \triangle A'B'C'$ $\blacksquare$

Sats 26: (LF3, v-v) Givet $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ där $\angle A = \angle A'$ och $\angle C = \angle C''$, så är $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Bevis:



Konstr. $\triangle A''B''C \sim \triangle ABC$ som tidigare dvs $|A''C| = |A'C'|$, $A''B'' \parallel AB$, $B'' \in$ str. BC

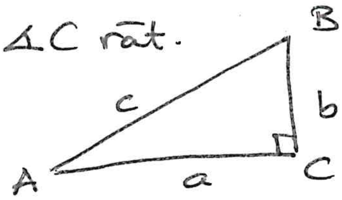
Vill visa: $\triangle A''B''C \cong \triangle A'B'C'$

$$\left.\begin{array}{l}\angle B''A''C = \{\text{alternat- \& vertikalvinklar}\} = \angle A \overset{\text{givet}}{=} \angle A' \\ |A'C'| = |A''C| \quad , \quad \angle C \overset{\text{givet}}{=} \angle C'\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\longrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{KF3} \\ \text{v-s-v}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle A''B''C \cong \triangle A'B'C' \quad \blacksquare$$

I och med detta är vi redo att visa:

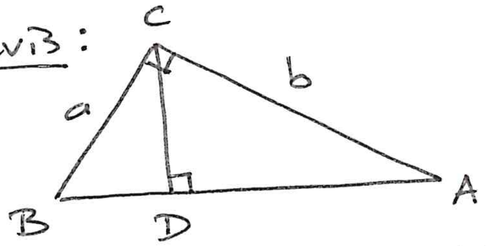
Sats 27: (Pythagoras sats) Givet $\triangle ABC$ där $\angle C$ rät.



Låt $a = |BC|$, $b = |BC|$ och $c = |AB|$.

Då är $a^2 + b^2 = c^2$.

Bevis:



Låt $D \in AB$ så att $CD \perp AB$

($|CD|$ = höjden från C)

Då gäller att:

$$\triangle ABC \overset{(1)}{\sim} \triangle CBD \overset{(2)}{\sim} \triangle ACD \quad \text{enl. LF3 (v-v)}$$

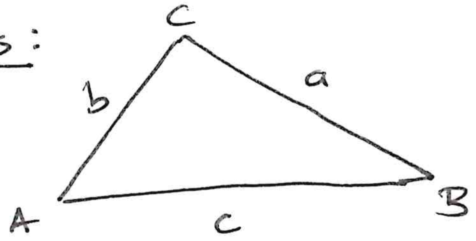
$$\left.\begin{array}{l}(1) \Rightarrow \dfrac{|AB|}{|BC|} = \dfrac{|BC|}{|BD|} \Leftrightarrow |AB||BD| = |BC|^2 = a^2 \\ (2) \Rightarrow \dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{|AC|}{|AD|} \Leftrightarrow |AB||AD| = |AC|^2 = b^2\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = |AB||BD| + |AB||AD| = |AB|(|BD| + |AD|) =$$

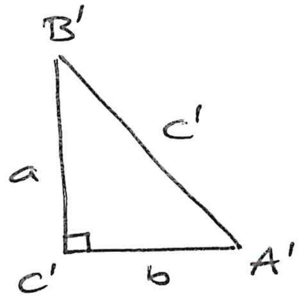
$$= |AB| \cdot |AB| = c^2 \quad \blacksquare$$

Sats 28: (Omvändningen till Pyth. sats) Givet $\triangle ABC$ där, med beteckn. från föreg. sats, $a^2+b^2=c^2$ så är $\angle C$ rät.

Bevis:



Konstr. $\triangle A'B'C'$ med $\angle C'$ rät, $|A'C'| = b$ och $|B'C'| = a$



Kalla $|A'B'| = c'$. Då gäller att:

$$(c')^2 = \{\text{Pyth. sats}\} = a^2+b^2 \overset{\text{givet}}{=} c^2 \Rightarrow c' = c$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{KF2}\\ \text{s-s-s}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \Rightarrow \angle C = \angle C' = R \quad \blacksquare$$