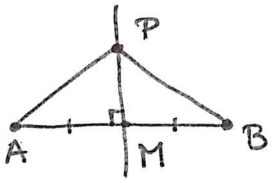
MVE365, Problemlösning, vt2022, Lektion 2.2

Vi börjar med två ekv. karakteriseringar av mittpunktsnormaler och bisektriser.

Sats: (Mittpunktsnormaler) Givet en sträcka AB gäller att:

$P \in AB$:s mittpunktsnormal $\iff |PA| = |PB|$



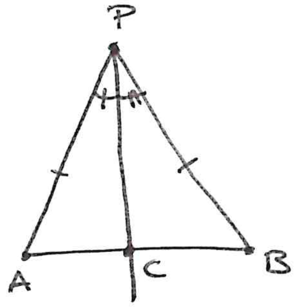
Bevis: $\boxed{\Rightarrow}$ Antag $P \in AB$s mittpunktsnormal

Två fall: 1) Om $P \in AB$, så $P = M$ mittpkt. Klart!

2) Om $P \notin AB$, drag PA och PB. Då är:

$$\left.\begin{array}{l} |AM| = |BM| \\ \angle AMP = \angle BMP \text{ rät} \\ MP \text{ gemensam} \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{s-v-s}]{\text{KF1}} \triangle AMP \cong \triangle BMP \Rightarrow |PA| = |PB|$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Antag nu att $|PA| = |PB|$. Två fall igen:



1) Om $P \in AB$ så $P =$ mittpkt. $\in$ mittpunktsnormal

2) Om $P \notin AB$ drag PC bisektris till $\angle P$. Då är:

$$\left.\begin{array}{l} |PA| = |PB| \\ \angle APC = \angle BPC \\ PC \text{ gemensam} \end{array}\right\} \begin{array}{l} (\text{alt. v-s-v}) \\ \xRightarrow[\text{s-v-s}]{\text{KF1}} \end{array} \triangle APC \cong \triangle BPC \Rightarrow |AC| = |BC| \text{ och}$$

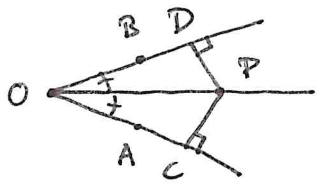
$\angle ACP = \angle BCP$ så båda räta då sidovinklar.

$\therefore P \in$ mittpunktsnormalen $=$ linjen PC ∎

Sats: (Bisektriser) Givet en vinkel $\angle AOB$ gäller att:

$P \in$ bisektrisen till $\angle AOB \iff P$ befinner sig på lika stort avstånd från vinkelbenen OA och OB

Bevis: $\boxed{\Rightarrow}$



Antag $P \in$ bisektrisen till $\angle AOB$

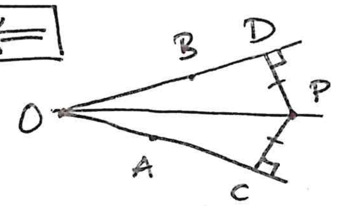
Drag normaler från P till linjerna OA & OB.

Låt $C \in$ str. OA, $D \in$ str. OB så att $PC \perp OA$ resp. $PD \perp OB$.

Vill visa att $|PC| = |PD|$. Vet att:

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle C = \measuredangle D \\ \measuredangle POC = \measuredangle POD \\ OP \text{ gemensam} \end{array}\right\} \overset{\text{V-V-S}}{\Longrightarrow} \triangle OCP \cong \triangle ODP \Rightarrow |PC| = |PD|$$

$\boxed{\Leftarrow}$



Antag nu $|PC| = |PD|$ i föreg. konstr.

Vill visa att $\measuredangle POC = \measuredangle POD$. Vet att:

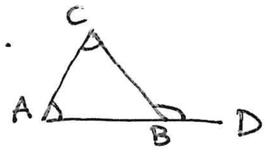
$$\left.\begin{array}{l} OP \text{ gemensam} \\ |PC| = |PD| \\ \measuredangle C = \measuredangle D \ \underline{\underline{\text{rät}}} \end{array}\right\} \overset{\text{"KF4"}}{\underset{}{\overset{\text{S-S-V}}{\Longrightarrow}}} \triangle OCP \cong \triangle ODP$$

$\Rightarrow \measuredangle POC = \measuredangle POD$ och alltså $P \in$ bisektrisen ∎

<u>Klassiska satser i euklidisk geometri</u>: (OH: 4.12)

(Avsnitt 4.10 ägnas åt area i euklidisk geometri. Vi kommer att behandla detta senare. 4.8, 4.9 & 4.11 handlar om icke-euklidisk geometri.)

<u>Sats 29</u>: (Den euklidiska yttervinkelsatsen) I en $\triangle$ är en yttervinkel summan av de två motstående inner-vinklarna.



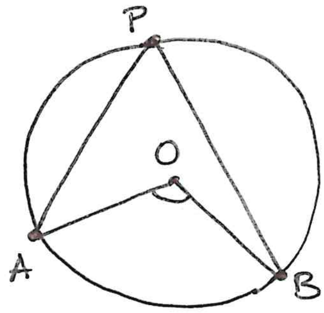
<u>Bevis</u>: Följer direkt av att vinkelsumman i en $\triangle$ är $2R$ och def. av sidovinklar. ∎

Resterande satser är alla relaterade till cirklar. För detta behöver vi först introducera lite terminologi:

<u>Definition</u>: (i) Vi skriver en cirkel med centrum i O och radie r, som $k(O,r)$.

(ii) Två punkter $A, B \in k(O,r)$ delar cirkeln i två <u>cirkelbågar</u>.

Kalla den ena av dem för bågen AB.



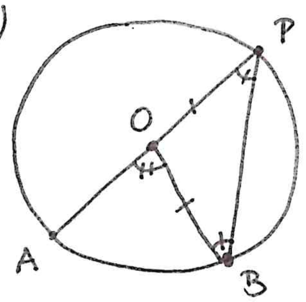
(iii) Låt P vara en punkt på den andra bågen. $\angle APB$ kallas för en <u>randvinkel</u> till bågen AB.

(iv) $\angle AOB$ kallas för bågen AB:s <u>medelpunktsvinkel</u> (kan vara större än 2R).

<u>Sats 30:</u> (Medelpunktsvinkelsatsen) Medelpunktsvinkeln är dubbelt så stor som en randvinkel stående på samma båge.

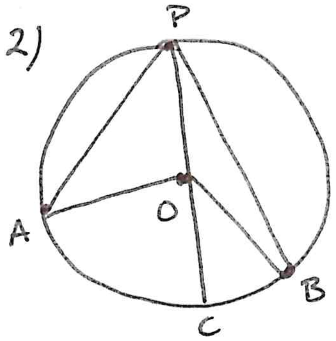
<u>Bevis:</u> Låt cirkeln $k(O,r)$ och $A,B,P \in k(O,r)$. Vi har 3 olika fall: (kap. 4+7+10 i P-K)

1)



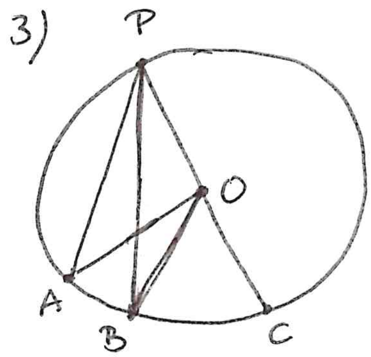
AP diameter

2)



PC diameter

3)



PC diameter

<u>1):</u> ΔOPB likbent då $|OB| = |OP| = r \Rightarrow \{\text{basvinkelsatsen}\} \Rightarrow$

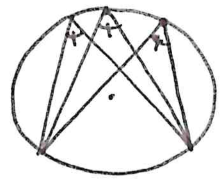
$$\Rightarrow \angle OBP = \angle OPB \xrightarrow{\text{Ytter}\angle\text{satsen}} \angle AOB = \angle OPB + \angle OBP = 2\angle OPB$$

<u>2):</u> $\angle AOB = \angle AOC + \angle BOC \overset{1)}{=} 2\angle APO + 2\angle BPO =$

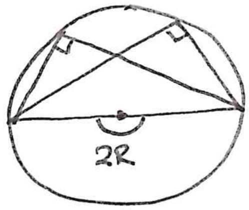
$$= 2(\angle APO + \angle BPO) = 2\angle APB$$

<u>3):</u> $\angle AOB = \angle AOC - \angle BOC \overset{1)}{=} 2\angle APC - 2\angle BPC =$

$$= 2(\angle APC - \angle BPC) = 2\angle APB \blacksquare$$

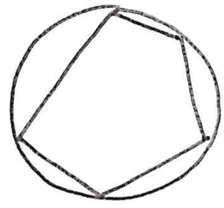


<u>Korollarium 1:</u> (Sats 31, Randvinkelsatsen) Alla randvinklar stående på samma båge är lika stora.

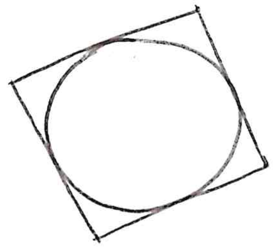


<u>Korollarium 2:</u> En vinkel som står på en halvcirkel är rät.

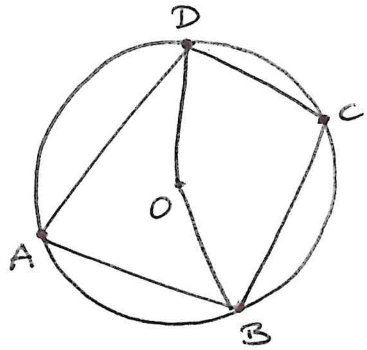
(Dessa satser är svåra att bevisa med vektorer eller koord.geom. Resterande satser är inte verktyg utan mest "häftiga" illustr./ konsekvenser av alla satser hittills.)



Definition: (i) En n-hörning i en cirkel vars n hörn alla ligger på cirkeln kallas för en i cirkeln inskriven n-hörning.



(ii) En n-hörning som omsluter en cirkel, och där alla n-hörningens sidor tangerar cirkeln, kallas för en omskriven n-hörning.



Sats 32: I en inskriven fyrhörning är summan av motstående vinklar 2R.

Bevis: Antag som i figuren. Sats 30:

$\measuredangle DAB = \frac{1}{2}\measuredangle DOB$ ($A \notin$ bågen DB)

$\measuredangle DCB = \frac{1}{2}\measuredangle DOB$ ($C \notin$ bågen DB) ej samma!

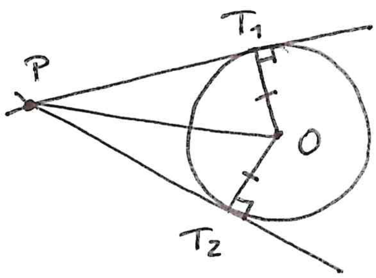
$\Rightarrow \measuredangle DAB + \measuredangle DCB = \frac{1}{2}(\measuredangle DOB_1 + \measuredangle DOB_2) = \{\text{helt varv } 4R\} =$

$= \frac{1}{2}\cdot 4R = 2R$ ∎

Omvändningen gäller också och kan visas med motsägelsebevis. (3 punkter bestämmer en cirkel, dvs varje fyrh. kan ej inskrivas) För att karakterisera omskrivna fyrhörningar behöver vi:

Sats: Givet $k(O,r)$ och $T_1, T_2 \in k(O,r)$ och antag att tangenterna till $k(O,r)$ i T_1, T_2 möts i en punkt P. Då är $|PT_1| = |PT_2|$.

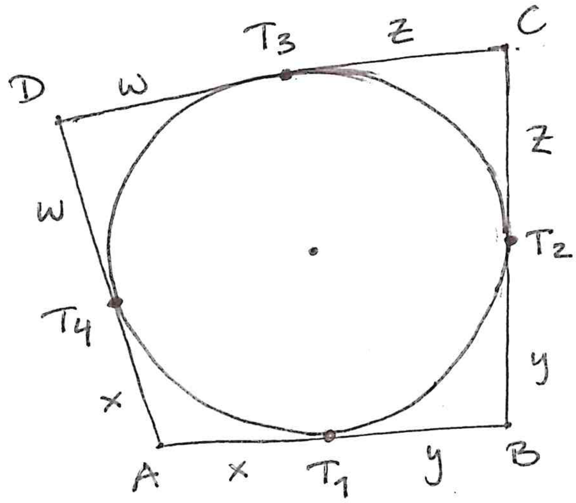
Bevis: Drag OP. Då är $\triangle OPT_1 \cong \triangle OPT_2$ enl. "KF4" ty, PO gemensam,



$|OT_1| = |OT_2|$ och $\measuredangle OT_1P = \measuredangle OT_2P$ rät då $OT_1 \perp T_1P$ och $OT_2 \perp T_2P$. Alltså är $|PT_1| = |PT_2|$. ∎

Sats: (Omskrivning fyrhörning) I en omskriven fyrhörning är summan av motstående sidors längder lika.

Bevis: Beteckna fyrhörningen ABCD och antag att cirkeln tangerar AB, BC, CD och DA i T_1, T_2, T_3 resp. T_4. Enl. föreg. sats är nu:



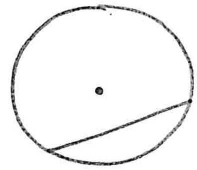
$|AT_1| = |AT_4| \overset{\text{säg}}{=} x$, $|BT_1| = |BT_2| = y$

$|CT_2| = |CT_3| = z$, $|DT_3| = |DT_4| = w$

$\therefore\ |AB| + |CD| = x+y+z+w = |BC| + |AD|$ ∎

Omvändningen gäller även här och bevisas också i detta fall med motsägelsebevis.

Definition: En sträcka som delar en cirkel i två cirkelbågar kallas för en korda. De två områden som uppstår i cirkelskivan kallas för cirkelsegment.

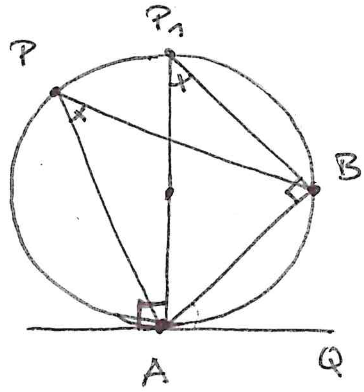


Sats 33: (Korda-tangent-satsen) Givet $k(O,r)$, tre punkter $A, B, P \in k(O,r)$ och en tangent AQ till $k(O,r)$, så är $\measuredangle QAB = \measuredangle APB$ om dessa vinklar är på olika sidor om AB.

Bevis: Drag diameter AP_1 genom A.

Då är: $AP_1 \perp AQ$ så $\measuredangle QAP_1 = R$

Därtill är $\measuredangle APB = \measuredangle AP_1B$ (rand$\measuredangle$satsen) och $\measuredangle ABP_1 = R$.



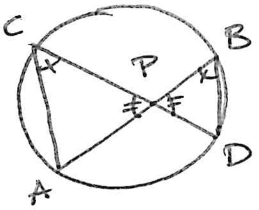
Detta ger:

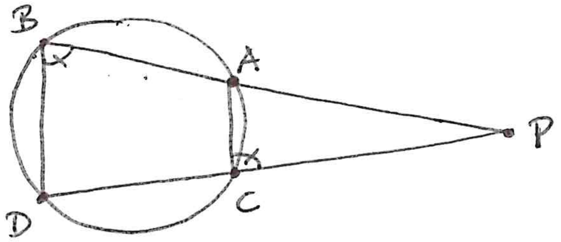
$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle QAB + \measuredangle BAP_1 = R \\ \measuredangle BAP_1 + \measuredangle BP_1A = R\end{array}\right\} \Rightarrow \measuredangle QAB = \measuredangle AP_1B = \measuredangle APB \quad \blacksquare$$

__Sats 34:__ (Kordasatsen) Om två kordor AB och CD i en cirkel skär varandra (ev. efter förlängning) i P, så är:

$$|PA||PB| = |PC||PD|$$

__Bevis:__ Två fall:

1) 

2) 

__1):__ Drag AC och BD. Då är $\measuredangle ACD = \measuredangle ABD$ (rand∡satsen)

Därtill är $\measuredangle APC = \measuredangle BPD$ (vertikalvinklar)

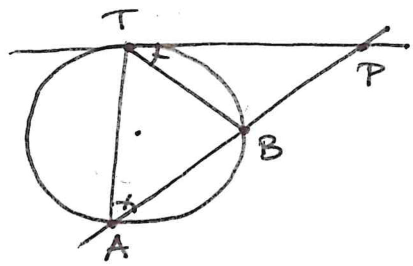
$$\overset{LF3,\, v\text{-}v}{\Longrightarrow} \triangle ACP \sim \triangle DBP \text{ så } \frac{|PB|}{|PC|} = \frac{|PD|}{|PA|} \Leftrightarrow |PA||PB| = |PC||PD|$$

__2):__ Drag AC, BD. ABDC inskriven $\overset{\text{sats } 32}{\Longrightarrow} \measuredangle ABD + \measuredangle ACD = 2R$

Men $\measuredangle ACD + \measuredangle ACP = 2R$ så $\measuredangle ABD = \measuredangle ACP$, $\measuredangle P$ gemensam

$$\overset{LF3,\, v\text{-}v}{\Longrightarrow} \triangle PAC \sim \triangle PDB \text{ så } \frac{|PA|}{|PD|} = \frac{|PC|}{|PB|} \Leftrightarrow |PA||PB| = |PC||PD| \quad \blacksquare$$

__Sats:__ (Power of a point) Givet $k(O,r)$, en tangent till $k(O,r)$ genom $T \in k(O,r)$, och en korda AB. Förläng kordan AB och låt P vara skärningspunkten mellan denna och tangenten. Då är $|PT|^2 = |PA||PB|$.



__Bevis:__ Drag AT, BT. Sats 33: $\measuredangle BAT = \measuredangle BTP$

$\measuredangle P$ gemensam $\overset{LF3,\, v\text{-}v}{\Longrightarrow} \triangle PTA \sim \triangle PBT \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{|PT|}{|BP|} = \frac{|AP|}{|PT|} \Leftrightarrow |PT|^2 = |AP||BP|. \quad \blacksquare$$