MVE365, Problemlösning, vt2022, Lektion 2.3

Grundkonstruktioner:

(i) Liksidig Δ

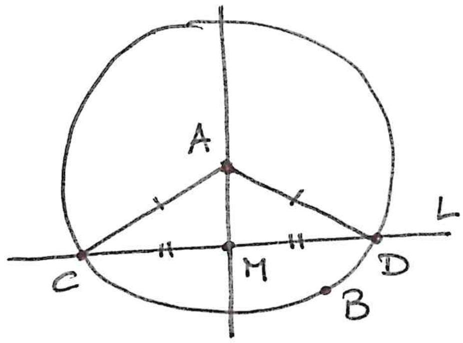
(ii) Avsättning av sträcka

(iii) Mittpunkt på sträcka

(iv) Mittpunktsnormal

PPG13: Konstr. normalen till en given linje genom en given punkt: (a) på linjen (b) utanför linjen

Lösn.skiss: (a) Normalen till L genom A = Mittpunktsnormalen till BC



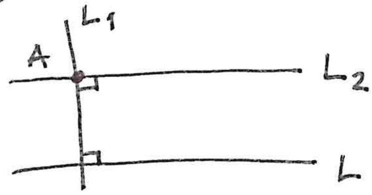
(b) Låt B andra sidan L och drag cirkel med centrum A, radie = $|AB|$. Låt skärn.pkter. C & D. Låt M = mittpunkt CD. Då linje genom AM sökt normal.

$$\left.\begin{array}{l} |AC| = |AD| \text{ (radie)} \\ AM \text{ gemensam} \\ |CM| = |DM| \text{ (mittpkt.)} \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{S-S-S}]{\text{KF2}} \triangle AMC \cong \triangle AMD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \measuredangle AMC = \measuredangle AMD = R \quad \blacksquare$$

(v) Normal till en linje genom en given punkt på eller utanför linjen.

PPG4: Konstr. en $\parallel$ linje till en given linje genom en given punkt.



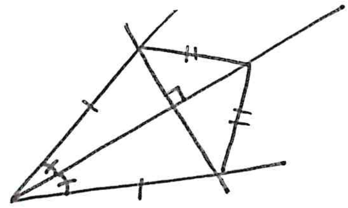
Lösn-skiss: Gör (v) två gånger!

Då $L \parallel L_2$ ty om de möts i någon punkt P bildas en △ där en ytterrinkel = en motstående innervinkel ↯ ■

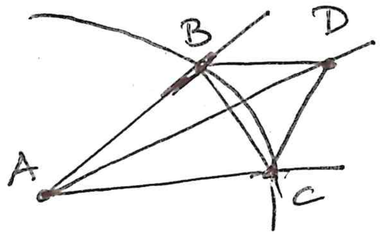
(vi) Parallell linje till en given linje genom en given punkt.

PPG 14: Konstr. bisektrisen till en given vinkel.

Lösn.: Analys: Givet bisektris kommer en normal till denna att bilda en likbent △. Om vi har normalen och gör en likbent △ "på andra sidan" kommer bisektrisen att gå genom spetsen.

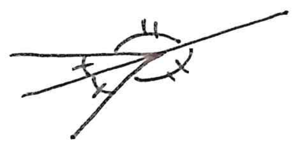


Konstruktion: Gör cirkel med godt. radie och centrum i vinkelns spets, som vi kallar A. Låt B & C skärnpkt. mellan cirkeln & vinkelbenen. Drag BC och konstr. liksidig △ med BC som bas. Kalla △ tredje hörn för D. Då är linjen genom AD en bisektris till den givna vinkeln.



Bevis: Per konstr. är $|AB| = |AC|$, $|BD| = |CD|$ och AD är gemensam, så enl. KF2 (s-s-s) är $\triangle ABD \cong \triangle ACD$. Alltså är $\angle BAD = \angle CAD$ och linjen genom AD en bisektris. ■

Utredning: Konstr. förutsätter att vinkeln är mindre än två räta. Om vinkeln är större än två räta kan konstr. genomföras på komplementvinkeln. Bisektrisen kommer att vara densamma då de spetsiga ∡ kommer att vara sidovinklar till de trubbiga.

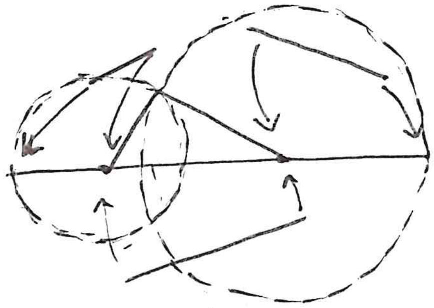


Om vinkeln = 2R kommer bisektrisen att bli normalen till en given linje genom en given punkt på linjen (och ger oss ett nytt sätt att konstr./bevisa denna).

(vii) Bisektris till en given vinkel.

<u>PPG 2</u>: Konstruera en Δ då tre sidor är givna.

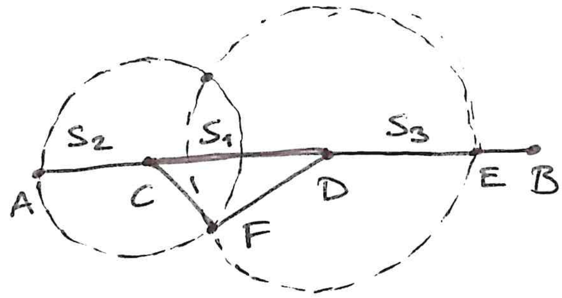
<u>Lösn.</u>: <u>Analys</u>: Det handlar om att flytta sträckor, så vi bör utnyttja (ii).



(ii) låter oss flytta sträckor så att de ligger längs en linje.

💡 Cirklar med radier = de två sidor i Δ som inte är basen, skär varandra precis så att Δ bildas.

<u>Konstruktion</u>: Kalla sidorna S_1, S_2, S_3 och avsätt dessa längs en rät linje enl. figuren.



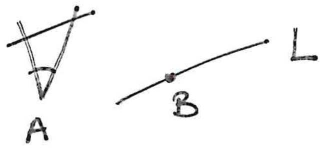
Konstr. en cirkel med radie $|AC|$ med centrum i C, och en cirkel med radie $|DE|$ med centrum i D. Låt F vara en av dessa cirklars skärningspunkt och drag CF och DF. Då är ΔCFD en Δ med sidorna S_1, S_2 och S_3.

<u>Bevis</u>: Då AC och CF är radier till samma cirkel är $|CF| = |S_2|$ och p.s.s. är $|DF| = |S_3|$. CD är endast en avsättning av S_2. ∎

<u>Utredning</u>: Konstruktionen bygger på att de två cirklarna skär varandra i två punkter. Om cirklarna inte gör detta så

innebär detta att $|S_2|+|S_3|<|S_2|$ dvs summan av två av sidorna i en Δ är mindre än den tredje sidan. Enligt Sats 8, Δ-olikheten, kan dock detta inte ske om en Δ ska kunna existera.

Från denna konstruktion följer att vi nu även kan avsätta vinklar. Antag t.ex. att vi har $\measuredangle A$ och en linje L, och vill avsätta A till en punkt B på L, så att ett vinkelben går längs L.



Genom att dra en sträcka mellan två godt. punkter på vinkelbenen bildas en Δ. Denna kan vi nu, enl. konstr. ovan, "flytta" så att A hamnar i B.

När vi nu kan avsätta både sträckor och vinklar följer konstr. av KF1 och KF3 dvs

<u>PPG1</u>: Konstr. en Δ då två sidor och vinkeln mellan dem är givna.

och

<u>PPG3</u>: Konstr. en Δ då en sida och vinklarna i dess ändpunkter är givna

omedelbart.