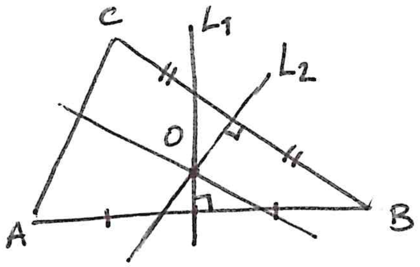
MVE365, Problemlösning, vt 2022, Lektion 3.1

Förra gången introducerade vi omskrivna och inskrivna cirklar för n-hörningar, och studerade vilka egenskaper som fyrhörningar ska uppfylla för att dessa ska existera.

Då en cirkel entydigt bestäms av tre punkter, har varje △ alltid en omskriven och inskriven cirkel. Dessa kan konstrueras med följande resultat:

<u>Sats</u>: (Omskrivna cirkelns medelpunkt) De tre mittpunktsnormalerna i en △ skär varandra i en punkt, som är den omskrivna cirkelns medelpunkt.



<u>Bevis</u>: Givet △ABC låt L_1 = mittpunktsnormal AB, L_2 = mittpunktsnormal BC och $L_1 \cap L_2 = \{O\}$.

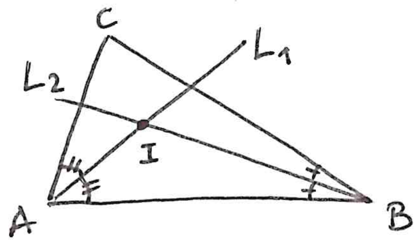
$O \overset{?}{\in}$ mittpunktsnormal AC ?

Vet att $P \in$ mittpunktsnormal $DE \Leftrightarrow |PD| = |PE|$ (*)

$$\left.\begin{array}{l} O \in L_1 \overset{(*)}{\Longrightarrow} |OA| = |OB| \\ O \in L_2 \overset{(*)}{\Longrightarrow} |OB| = |OC| \end{array}\right\} \Rightarrow |OA| = |OC| \overset{(*)}{\Rightarrow} \text{Ja! } O \in \text{m.p.n. } AC$$

Men detta ger också att $|OA| = |OB| = |OC|$, så $A, B, C \in k(O, |OA|)$ dvs den omskrivna cirkeln. ■

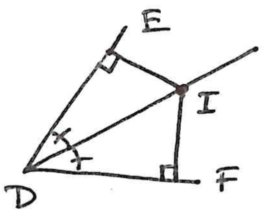
<u>Sats</u>: (Inskrivna cirkelns medelpunkt) De tre bisektriserna i en △ skär varandra i en punkt, som är den inskrivna cirkelns medelpunkt.



<u>Bevis</u>: Givet △ABC låt L_1 = bisektris ∡A, L_2 = bisektris ∡B, och $L_1 \cap L_2 = \{I\}$

$\overset{?}{}\ I \in$ bisektris ∡C ?

Låt $d(I,DE)$ = avståndet mellan I och linjen/sträckan DE



Vet att: $I \in$ bisektris $\angle D \Leftrightarrow d(I,DE) = d(I,DF)$ $(\star)$

$$\left.\begin{array}{l} I \in \text{bisektris } \angle A \overset{(\star)}{\Longrightarrow} d(I,AB)=d(I,AC) \\ I \in \text{bisektris } \angle B \overset{(\star)}{\Longrightarrow} d(I,AB)=d(I,BC) \end{array}\right\} \Rightarrow d(I,AC)=d(I,BC)$$

$\overset{(\star)}{\Longrightarrow}$ Ja! $I \in$ bisektris $\angle C$

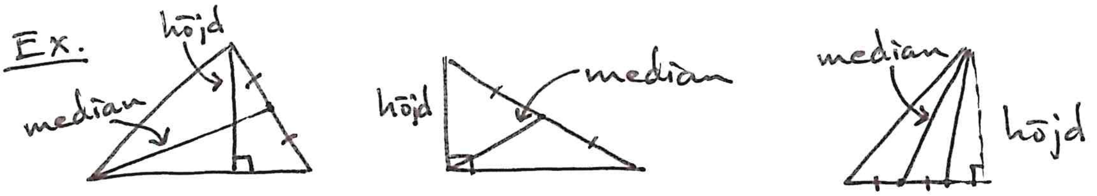
Men detta ger också att $d(I,AB)=d(I,AC)=d(I,BC)$ så $k(I, d(I,AB))$ tangerar Δ tre sidor, dvs k är en inskriven cirkel. ■

Vid sidan av mittpunktsnormaler och bisektriser, finns ytterligare två sorters sträckor associerade med trianglar:

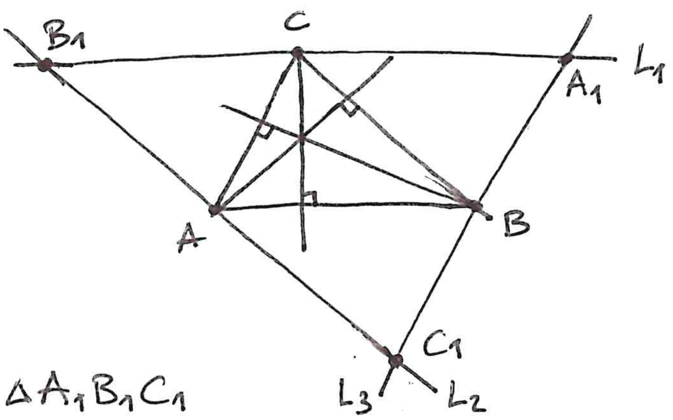
1) <u>höjden</u> mot en sida

2) medianen mot en sida, som definieras som sträckan från hörnet på en Δ till mittpunkten på motstående sida.

<u>Ex.</u>



<u>Sats 43</u>: De tre höjderna i en Δ (betraktade som linjer) skär varandra i en punkt.



<u>Bevis</u>: Givet ΔABC, låt

$L_1 \parallel AB$, $C \in L_1$, $L_1 \cap L_2 = \{B_1\}$

$L_2 \parallel BC$, $A \in L_2$, $L_1 \cap L_3 = \{A_1\}$

$L_3 \parallel AC$, $B \in L_3$, $L_2 \cap L_3 = \{C_1\}$

Idé: Visa höjder $\Delta ABC \Leftrightarrow$ m.p.n. $\Delta A_1B_1C_1$

$$\left.\begin{array}{l} B_1C \parallel AB \\ B_1A \parallel CB \end{array}\right\} \Rightarrow ABCB_1 \text{ parallellogram} \Rightarrow |AB| = |B_1C|$$

$\left.\begin{array}{l} A_1C \parallel AB \\ A_1B \parallel AC \end{array}\right\} \Rightarrow ABA_1C$ parallellogram $\Rightarrow |AB| = |A_1C| \Rightarrow$

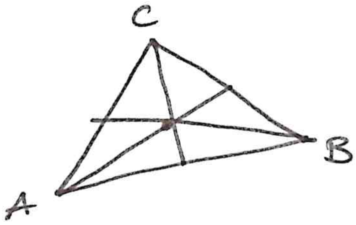
$\Rightarrow |B_1C| = |A_1C| \Rightarrow C$ mittpunkt på A_1B_1 $(*)$

Därtill: höjden från $C \perp AB$, $AB \parallel A_1B_1 \Rightarrow$ höjden från $C \perp A_1B_1 \overset{(*)}{\Rightarrow}$ höjden från $C =$ mittpunkts-normal till A_1B_1.

På samma sätt visas höjden från A och B = mittpunkts-normal till B_1C_1 resp. A_1C_1.

De tre mittpunktsnormalerna till $\triangle A_1B_1C_1$ skär varandra i en punkt $\Rightarrow$ höjderna i $\triangle ABC$ skär varandra i en punkt $\blacksquare$

<u>Sats 40</u>: De tre medianerna i en $\triangle$ skär varandra i en punkt, som delar varje medianerna i förhållande 2 : 1 räknat från hörnet.



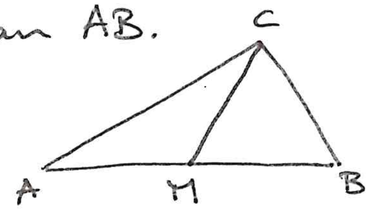
<u>Anm.</u>: Skärningspunkten i sats 40 brukar kallas för $\triangle$:s <u>tyngdpunkt</u>.

Sats 40 bevisas enklast m.h.a. vektorer (detta görs i OH) vilket inte ingår i den här kursen. (I mån av tid kommer vi att ge ett bevis utan vektorer senare i kursen.)

Vi har ytterligare 2 resultat om medianer och bisektriser.

<u>Sats</u>: Givet $\triangle ABC$ låt M vara mittpunkt på sträckan AB. Då gäller att:

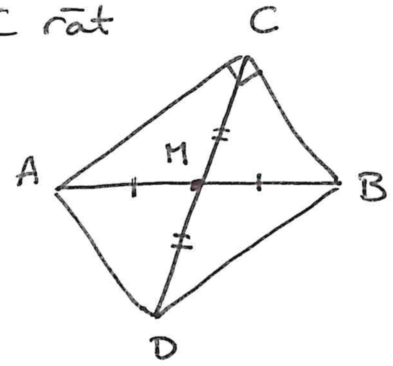
$|AM| = |BM| = |CM| \Leftrightarrow \angle C$ rät



<u>Bevis</u>: $\boxed{\Rightarrow}$ Om $|AM| = |BM| = |CM|$ så är M medelpunkten

för den omskrivna cirkeln $\Rightarrow$ AB diameter för cirkeln

$\Rightarrow$ {Korollarium till medel∡satsen} $\Rightarrow$ ∡C rät

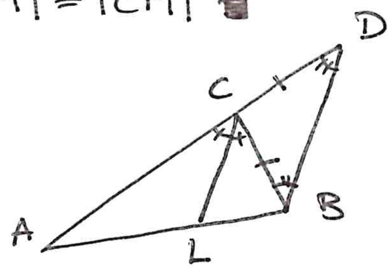


$\boxed{\Leftarrow}$ Antag ∡C rät och förläng CM till CD med $|CD| = 2|CM|$. Drag AD och BD. Då är ADBC en parallellogram ty diagonalerna skär varandra på mitten $\Rightarrow \measuredangle D = \measuredangle C = R \Rightarrow$

$$\Rightarrow \measuredangle A = \measuredangle B = \frac{4R - 2R}{2} = R \Rightarrow \text{ADBC rektangel}$$

$$\left.\begin{array}{l} AD \text{ gemensam} \\ \measuredangle A = \measuredangle D = R \\ |AC| = |BD| \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{s-v-s}]{\text{KF1}} \triangle ACD \cong \triangle DBA \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ diagonalerna lika långa $\Rightarrow |AM| = |BM| = |CM|$ ∎



Sats 39: (Bisektrissatsen) Givet $\triangle ABC$ låt CL vara bisektris till ∡C. Då gäller att: $\dfrac{|AL|}{|AC|} = \dfrac{|BL|}{|BC|}$.

Bevis: Förläng sidan AC över C till D så att $|CD| = |CB|$

Basvinkelsatsen: $\measuredangle CBD = \measuredangle CDB$

Eukl. ytter∡satsen: $\measuredangle ACB = \measuredangle CBD + \measuredangle CDB = 2\measuredangle CDB \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \measuredangle CDB = \frac{1}{2}\measuredangle ACB = \{\text{CL bisektris}\} = \measuredangle ACL \Rightarrow CL \parallel BD$

Transversalsatsen: $\dfrac{|AL|}{|BL|} = \dfrac{|AC|}{|CD|} = \{|CD| = |CB|\} = \dfrac{|AC|}{|CB|} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{|AL|}{|AC|} = \frac{|BL|}{|BC|} \quad ∎$$