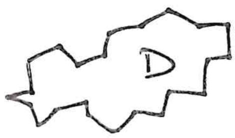
MVE365, Problemlösning, vt2022, Lektion 3.3

Area i euklidisk geometri: (OH: 4.10)

Area-begreppet är nära relaterat till likformighet och Pyth. sats, och skiljer sig därför åt mellan euklidisk och icke-euklidisk geometri (icke-eukl. area behandlas i OH: 4.11).

Mycket tankekraft har genom århundradena ägnats åt att definiera area (mer allmänt: måttet av en mängd) på ett generellt och logiskt konsekvent sätt. Vi är endast intresserade av arean av begränsade polygonala områden i planet, dvs områden som begränsas av (ändliga) sträckor.



Antag att D är ett sådant område, och låt $m(D)$ beteckna arean av D.

Vi vill att $m(\cdot)$ ska ha följande egenskaper:

AR1) $m(D) > 0$

AR2) $m(D) = m(D_1) + m(D_2)$ då D delas i två områden D_1 & D_2

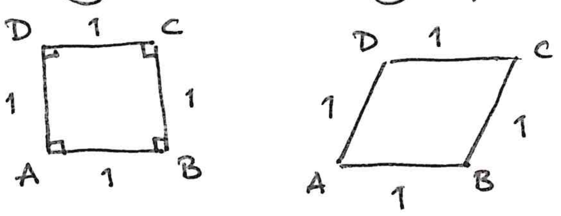
AR3) $m(D_1) = m(D_2)$ då $D_1 \cong D_2$.

(Dessa villkor ska även vara uppfyllda för icke-euklidisk area.)

Därtill vill vi ha en enhet för area:

AR4) (I eukl. geom. ska) $m(D) = 1$ då D är en kvadrat med sidan 1.

Anm.: AR4) havererar i i.e.-geom. då vi inte har parallellitet. Även definitionen $|AB| = |AD|$ ger inget väldef. begrepp då en romb också uppfyller detta men inte har samma area.



Istället låter man den i.e.-arean av en i.e.-triangel vara $m(\Delta) = \pi - (\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C)$, den s.k. <u>defekten</u>. Denna kan man visa uppfyller AR1)–3). Som normering använder man rätvinkliga trianglar (läs OH:4.11). Denna i.e.-area är helt annorlunda än den area vi är vana vid. T.ex. kan ingen i.e.-Δ ha en i.e.-area större än π (vilket är ett annat ex. på att likformighet är omöjligt inom i.e.-geometri).

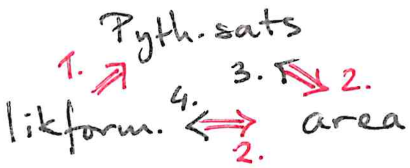
För att area-funktionen, m, ska vara väldef. behöver man visa två saker:

I. Det finns <u>minst</u> en funktion m som uppfyller AR1)–4) (existens)

II. Det finns <u>högst</u> en funktion m som uppfyller AR1)–4) (entydighet)

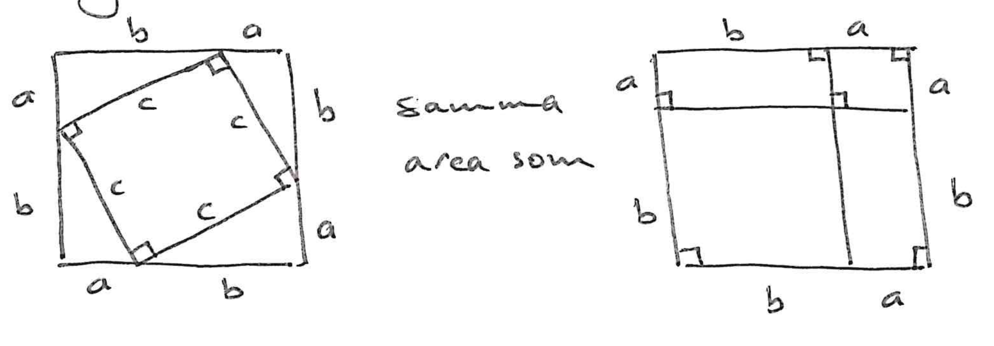
Alltså finns exakt en funktion som uppfyller AR1)–4) och värdet $m(D)$ kallar vi för <u>arean av D.</u>

I OH:4.10 ges två olika bevis för existensen, ett som bygger på likformighet, och ett som bygger på likformighet eller Pyth. sats.



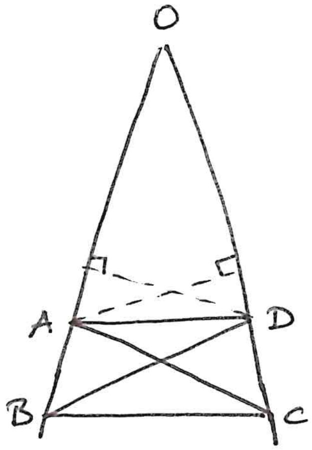
Vi har redan visat Pyth. sats m.h.a. likformighet.

Det är inte svårt att bevisa Pyth. sats m.h.a. area. Vi har bl.a. det eleganta beviset:



Och även Euklides bevis i Elementa (se OH: 4.11)

Slutligen kan existensen av area användas för att bevisa transversalsatsen för två skärande linjer (och därigenom topp△satsen och L.F. 1-3, dvs hela vår likformighetsteori).



Antag att $AD \parallel BC$ i figuren. Då har $\triangle ADC$ och $\triangle ADB$ samma bas och höjd.

$$\Rightarrow m(\triangle ADC) = m(\triangle ADB) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(\triangle OAC) = m(\triangle OBD) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{m(\triangle OAD)}{m(\triangle OBD)} = \frac{m(\triangle OAD)}{m(\triangle OAC)} = \frac{|OD|}{|OC|} \blacksquare$$

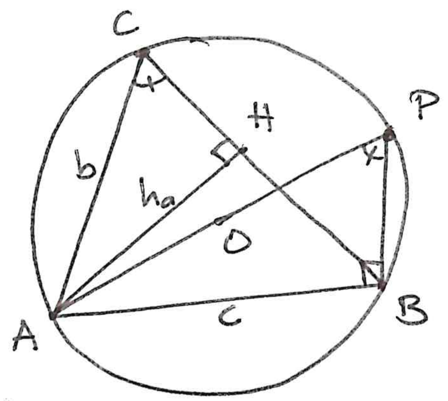
Vi ser att likformighet, Pyth-sats och det area-begrepp vi är vana vid är "olika sidor av samma mynt". Har vi en av dem, följer de två andra.

Nu när vi "lärt oss" vad area är avslutar vi geometri-satserna med några resultat om area av trianglar. Från grundskolan vet vi att arean av en △ ges av basen × höjden/2, men det finns "ack så många" andra formler för denna area.

<u>Sats 35</u>: (Area △, 1) Givet $\triangle ABC$ låt $a = |BC|$, $b = |AC|$ och $c = |AB|$ och låt R beteckna den omskrivna cirkelns radie.

Om $S = \text{Area}(\triangle ABC)$ så gäller att:

$$S = \frac{abc}{4R}$$



<u>Bevis</u>: Låt h_a beteckna höjden mot A.

Vet att: $S = \frac{a \cdot h_a}{2}$ (*)

Drag omskrivna cirkeln och diametern AP och (då vi vill ha två räta ∡ för kunna visa likformighet) drag PB.

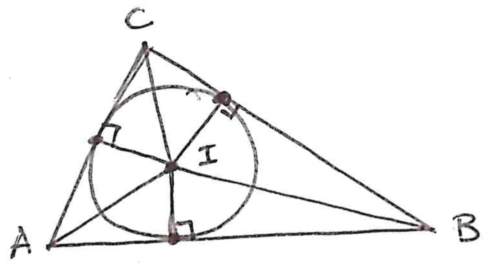
Medel∡satsen: $\measuredangle ACB = \measuredangle APB$ och $\measuredangle ABP$ rät $\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} LF3 \\ V-V \end{matrix} \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \triangle ACH \sim \triangle APB \Rightarrow \frac{h_a}{c} = \frac{b}{2R} \Leftrightarrow h_a = \frac{bc}{2R} \overset{(*)}{\Longrightarrow}$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} S = \frac{a}{2} \cdot \frac{bc}{2R} = \frac{abc}{4R}. \blacksquare$$

<u>Sats 36</u>: (Area △, 2) Givet △ABC låt a, b, c och S vara som ovan. Låt vidare $p = \frac{a+b+c}{2}$ och r = inskrivna cirkelns radie.

Då gäller att: $S = r \cdot p$



<u>Bevis</u>: Drag inskrivna cirkeln med centrum I, och drag AI, BI och CI (bisektriser)

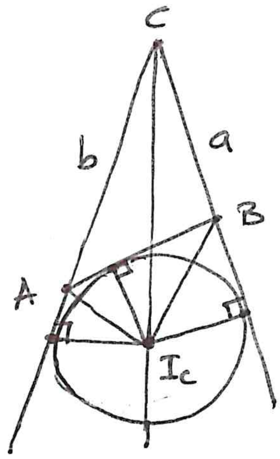
Vi har att: $S = S_{\triangle ABI} + S_{\triangle ACI} + S_{\triangle BCI} =$

$$= \frac{c \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} = r \cdot \frac{a+b+c}{2} = r \cdot p \blacksquare$$

För de två sista satserna behöver vi introducera ett nytt begrepp:

<u>Definition</u>: Givet en △ är en till denna <u>vidskriven</u> cirkel, en cirkel som ligger utanför △ och tangerar en sida i △ och de båda återstående sidornas förlängningar.

En △ har alltid 3 vidskrivna cirklar. Man kan visa att t.ex. den vid sidan AB vidskrivna cirkelns medelpunkt ligger på bisektrisen till $\angle C$, och på bisektriserna till de yttre $\angle$ vid A och B.



Sats 37: (Area Δ, 3) Givet ΔABC låt a, b, c, S och p vara som i sats 35–36. Låt r_c beteckna radien för den vidskrivna cirkeln vid sidan AB. Då gäller att:

$$S = r_c \cdot (p-c)$$

Bevis: Låt I_c beteckna den vidskrivna cirkelns centrum och drag AI_c, BI_c och CI_c. Vi har att:

$$S = S_{\Delta ACI_c} + S_{\Delta BCI_c} - S_{\Delta ABI_c} = \frac{br_c}{2} + \frac{ar_c}{2} - \frac{cr_c}{2} =$$

$$= r_c \cdot \frac{a+b-c}{2} = r_c \cdot \frac{a+b+c-2c}{2} = r_c \cdot (p-c) \blacksquare$$

Slutligen har vi den berömda:

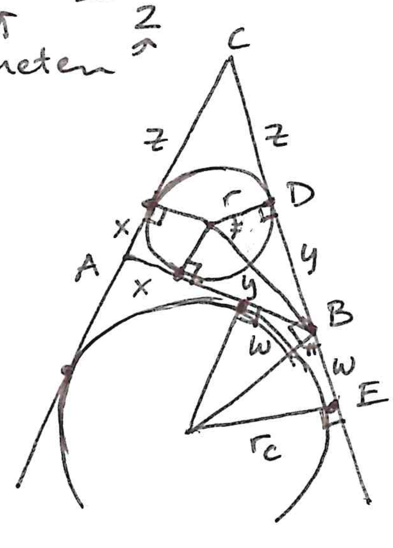
Sats 38: (Herons formel, Area Δ, 4) Givet ΔABC låt a, b, c, S och p vara som i sats 35–37. Då gäller att:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}}$$

>0 enl. Δ-olikheten

Bevis: Genom att ställa upp och lösa ekv. syst.: $\begin{cases} x+z=b \\ x+y=c \\ y+z=a \end{cases}$

och motsvarande för den vidskrivna cirkeln vid AB (se fig. i sats 37 i OH) kan man visa att:



$x = p - a = w, \quad y = p - b, \quad z = p - c$

Då IB och I_cB är bisektriser till $\angle B$ resp. yttervinkeln vid B följer att $\angle IBI_c$ är rät $\Rightarrow \begin{Bmatrix} LF3 \\ V\text{-}V \end{Bmatrix} \Rightarrow \triangle BDI \sim \triangle I_cEB$

$$\Rightarrow \frac{r}{w} = \frac{y}{r_c} \Leftrightarrow rr_c = y \cdot w = (p-b)(p-a) \quad (*)$$

Från Sats 36 och 37 följer nu att:

$$S^2 = S \cdot S = r \cdot p \cdot r_c \cdot (p-c) = p \cdot \overset{(*)}{\widetilde{rr_c}} \cdot (p-c) = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\therefore \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \blacksquare$$

En direkt konsekvens av Herons formel är att den låter oss uttrycka inskrivna och vidskrivna cirklars radie i a, b och c:

Sats 36: $S = r \cdot p \Leftrightarrow r = \dfrac{S}{p} \overset{\text{Heron}}{=} \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

Sats 37: $S = r_c \cdot (p-c) \Leftrightarrow r_c = \dfrac{S}{p-c} \overset{\text{Heron}}{=} \sqrt{\dfrac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}$

Bonus:

Sats 35: $S = \dfrac{abc}{4R} \Leftrightarrow R = \dfrac{abc}{4S} \overset{\text{Heron}}{=} \dfrac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$