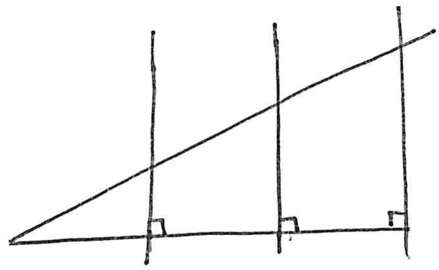
MVE365, Problemlösning, vt2022, Lektion 5.2

PPG24 Dela en given sträcka i (a) tre (b) n lika delar.

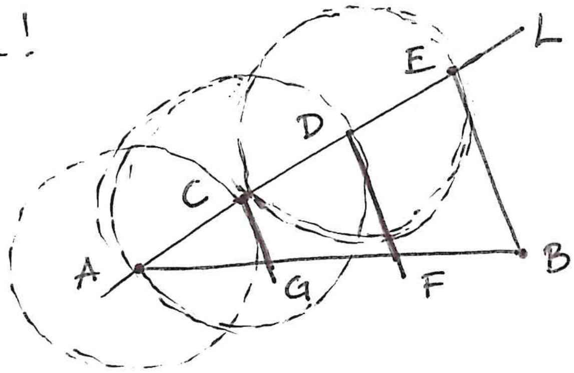
Vi löser endast (a), men konstruktionen fungerar för vilket $n \in \mathbb{N}$ som helst.



Lösn.: Analys: Vår konstr. kan inte bygga på att dela en $\measuredangle$ i 3 delar, då detta är omöjligt. Då "återstår bara" andra sträckor.

Working backwards: Om vi utgår från en 3-delad sträcka och t.ex. drar normaler, ser vi att dessa delar varje annan linje i tre lika delar (transversalsatsen). Men det måste inte vara normaler. Vilka tre parallella linjer som helst går bra.

Vi kan vända på detta!



Konstruktion: Låt sträckan vara AB och låt L vara en godt. linje genom A.

Konstr. cirkel med godt. radie och centrum i A, kalla skärningen med L för C.

Konstr. cirkel med radie $|AC|$ och centrum i C, kalla skärningen med L för D.

Konstr. cirkel med radie $|CD|$ och centrum i D, kalla skärningen med L för E.

Drag EB. Drag linje genom D $\parallel$ EB, kalla skärningen med AB för F.

Drag linje genom $C \parallel DF$, kalla skärningen med AB för G.

Då är $|AG| = |GF| = |FB|$, så AB delas av F och G i tre delar.

<u>Bevis</u>: Kan använda transversalsatsen då $CG \parallel DF \parallel EB$.

$$\frac{|AG|}{|GF|} = \frac{|AC|}{|CD|} \Leftrightarrow \{|AC| = |CD|\} \Leftrightarrow |AG| = |GF|$$

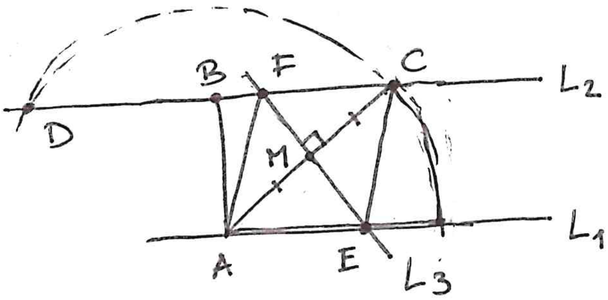
$$\frac{|GF|}{|FB|} = \frac{|CD|}{|DE|} \Leftrightarrow \{|CD| = |DE|\} \Leftrightarrow |GF| = |FB| \quad \blacksquare$$

<u>Utredning</u>: För konstruktionen spelar det ingen roll hur stor (ändlig) radie den första cirkeln med centrum i A har. Det spelar heller ingen roll hur linjen L väljs i förhållande till AB, sålänge $AB \not\subset L$.

<u>Anm.</u>: Det är tydligt från konstr. och beviset att detta kan generaliseras till att dela AB i 4, 5, ..., n delar.

<u>PPG11(b)</u>: Konstr. en romb givet höjd och en diagonal.

<u>Lösn.</u>: <u>Analys</u>: Romb specialfall av parallellogram, vilken är en fyrhörning där diagonalerna skär varandra på mitten (ekv. def.). För en romb gäller därtill att diagonalerna skär varandra under rät vinkel.



<u>Konstruktion</u>: Låt höjden $= AB$ och dra linjer $\perp AB$ genom A och B, L_1 resp. L_2. Avsätt diagonalen vid A på L_1. Konstr. cirkeln $k(A, |\text{diag}|)$.

Låt $L_2 \cap k = \{C, D\}$. Vi konstr. romb med C som hörn (utan inskränkning). Drag AC. Konstr. mittpunktsnormal L_3 till AC. Låt $L_3 \cap L_1 = \{E\}$, $L_3 \cap L_2 = \{F\}$.

Då är AECF romb med angiven höjd och diagonal.

<u>Bevis</u>: Låt $\{M\} = AC \cap L_3$. Per konstr. så är $|AM| = |MC|$ och $\measuredangle AME$ rät. Återstår att visa: $|EM| = |FM|$

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle AME = \measuredangle CMF = R \\ |AM| = |MC| \\ \measuredangle EAM = \measuredangle FCM \ \left(\begin{array}{c}\text{alternat-}\\ \text{vinklar}\end{array}\right) \end{array}\right\} \overset{\text{KF3}}{\underset{\text{v-s-v}}{\Longrightarrow}} \triangle AEM \cong \triangle CFM \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |EM| = |FM| \quad \blacksquare$$

<u>Utredning</u>: Konstr. fungerar så länge som vi får två skärningspunkter mellan k och L_2, men detta är rimligt då detta motsvarar $|\text{diag.}| > h$. Om den givna diagonalens längd är $\begin{array}{l} > \sqrt{2}h \\ < \sqrt{2}h \end{array}$ blir det den $\begin{array}{l} \text{långa} \\ \text{korta} \end{array}$ diagonalen i romben (kvadrat om $= \sqrt{2}h$).

Att avsätta vid B eller välja annan skärningspunkt än C speglar eller translaterar konstruktionen.

Rekommenderade uppgifter:

PPG 5, 10, 11(a), 15, 25

<u>Grundkonstruktioner:</u>

(i) Liksidig $\triangle$

(ii) Avsättning av sträcka och vinkel

(iii) Mittpunkt och mittpunktsnormal till sträcka

(iv) Normal till en linje genom en given punkt på eller utanför linjen.

(v) Parallell linje till given linje genom given punkt.

(vi) Bisektris till en given vinkel.

(vii) Triangel givet s-v-s, s-s-s eller v-s-v

(viii) Dela en sträcka i n lika delar