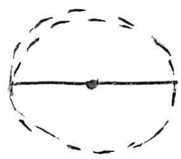
MVE365, Problemlösning, vt2022, Lektion 5.4

PPG27: Konstr. mängden av alla punkter från vilka en given sträcka syns under en given vinkel.

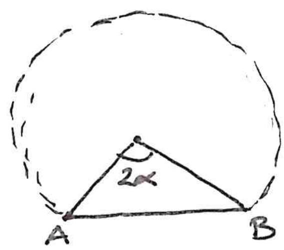
Lösn.: **Analys:** Låt vinkeln $= \alpha$, sträcka $= AB$

"Solving a simpler analogous problem"



Antag först att $\alpha =$ rät. I så fall alla punkter på cirkeln med AB som diameter.

$\Longrightarrow$ De eftersökta punkterna måste ligga på en cirkelbåge enligt rand$\measuredangle$satsen för $\alpha \neq$ rät



I så fall kommer motsvarande medelpunktsvinkel att vara 2α

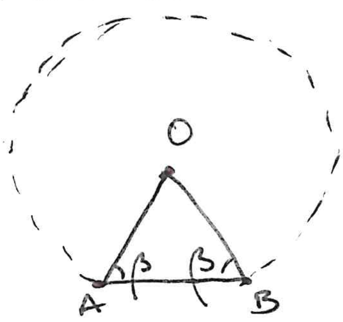
$\Rightarrow \{\text{likbent } \Delta\} \Rightarrow \measuredangle A = \measuredangle B = \frac{2R - 2\alpha}{2} = R - \alpha$ ← Gå att konstr.

Vi kan vända på detta!

Konstruktion: Låt sträckan $= AB$ och $\measuredangle = \alpha$. Antag α spetsig.

Konstr. $\beta = R - \alpha$ genom att dra normal mot ena vinkelbenet genom spetsen på α.

Konstr. ΔABO genom v-s-v med β, AB, β. Drag cirkelbåge AB med centrum i O och $|AO| =$ radie, p.s.s. linjen AB som O.



Då syns AB under $\measuredangle = \alpha$ från alla punkter på denna cirkelbåge.

Bevis: $\beta = R - \alpha \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \measuredangle\text{-summa} \\ \triangle \end{matrix} \right\} \Rightarrow \measuredangle AOB = 2R - 2(R-\alpha) = 2\alpha$

$\measuredangle AOB$ medelpunkts$\measuredangle$ till bågen $AB \Rightarrow \{$rand$\measuredangle$satsen$\}$

$\Rightarrow \alpha =$ varje rand$\measuredangle$ till bågen AB ∎

Utredning: Om α trubbig genomför konstr. för $2R - \alpha$ men låt bågen AB vara den på andra sidan linjen AB.

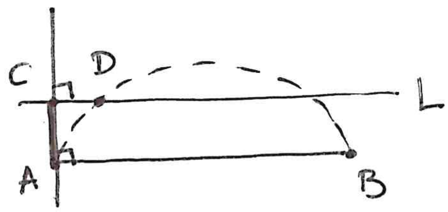
Om $\alpha =$ rät så är konstr. alla pkter. på cirkeln med AB som diameter.

Om $\alpha \geq 2R$ så "make:ar uppgiften inte sense" (finns inga punkter av den eftersökta formen).

PPG 28 (a) Konstr. en $\triangle$ givet en sida, motstående $\measuredangle$ och höjd till den givna sidan.

Lösn.: **Analys:** Kan avsätta sträckor, konstr. normaler och konstr. mängden av alla punkter från vilka en sträcka syns under en given $\measuredangle$, så konstr. borde vara möjlig.

Konstruktion: Låt sida $= AB$, vinkel $= \alpha$ och höjd $= h$



Konstr. mängden av alla punkter från vilka AB syns under α.
Konstr. normal till AB genom A och avsätt h längs denna utifrån A p.s.s. som cirkelbågen AB. Kalla andra ändpunkten för C, och konstr. linjen L genom $C \parallel AB$.

Kalla (ena) skärn. mellan L och bågen AB för D.
Då är $\triangle ABD$ den eftersökta $\triangle$.

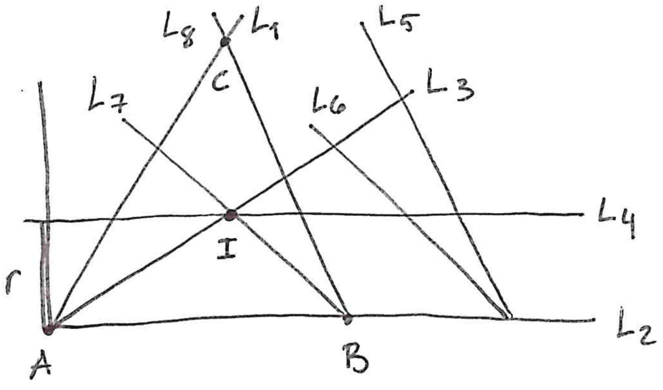
<u>Bevis</u>: Vet att vi har korrekt $\triangle$ från grundkonstruktionen.
Då $L \parallel AB$ är $d(D, AB) = |CA| = h$ så $\triangle ABD$ har höjden h mot sidan AB. ∎

<u>Utredning</u>: Konstr. fungerar så länge $|h| \leq \max(\text{bågen } AB, AB)$

<u>PPGB1</u>: Konstr. en $\triangle$ givet två vinklar och radien till den inskrivna cirkeln.

<u>Lösn.</u>: <u>Analys</u>: Vet att bisektriserna i en $\triangle$ skär varandra i en punkt, som är den inskrivna cirkelns centrum.

Vi har två vinklar = två bisektriser, dvs centrum, och radien, så konstr. är möjlig.



<u>Konstruktion</u>: Låt α, β beteckna vinklarna, och r radien. Antag α spetsig och beteckna vinkelbenen L_1 resp. L_2 och vinkelspetsen A. Konstr. bisektrisen L_3 till α. Avsätt r längs normalen till L_2 med utgångspunkt i A (p.s.s. som L_1).
Drag $L_4 \parallel L_2$ genom andra ändpunkten på r. Låt $L_3 \cap L_4 = \{I\}$.
Avsätt β mot α godtyckligt längs L_2. Låt L_5 beteckna β:s andra vinkelben och drag bisektrisen L_6. Drag $L_7 \parallel L_6$

genom I, och låt $L_7 \cap L_2 = \{B\}$. Drag $L_8 \parallel L_5$ genom B, och låt $L_1 \cap L_6 = \{C\}$. Då är $\triangle ABC$ den eftersökta $\triangle$.

Bevis: Klart att $\measuredangle B = \beta$ då $L_8 \parallel L_5$. $k(I, |r|)$ inskriven cirkel då vi vet att $I \in$ bisektris $\measuredangle A$ per def. och $I \in$ bisektris $\measuredangle B$ då $L_7 \parallel L_6$, så $I =$ den inskrivna cirkelns centrum.

Därtill gäller att $d(I, AB) = \{L_4 \parallel L_2\} = |r|$ så $r =$ inskrivna cirkelns radie ∎

Utredning: Vi kan utgå från att α är spetsig då minst två av vinklarna i en $\triangle$ alltid är spetsiga (Sats 9).

För konstr. spelar det ingen roll om β är spetsig, rät eller trubbig. Längden av r påverkar inte heller.