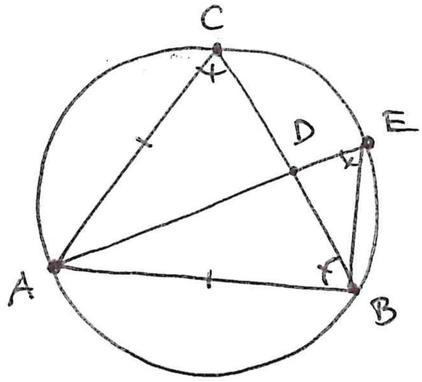
MVE365, Problemlösning, vt2022, Lektion 6.4

OH58: I $\triangle ABC$ är $|AB| = |AC|$. D är en punkt på sidan BC. Linjen AD skär den kring $\triangle ABC$ omskrivna cirkeln i A och E. Bevisa att $\measuredangle ADB = \measuredangle ABE$.



Bevis: Bas∡satsen: $\measuredangle ACB = \measuredangle ABC$ (i)

Medelpunkts∡satsen: $\measuredangle C = \measuredangle E$ (ii)

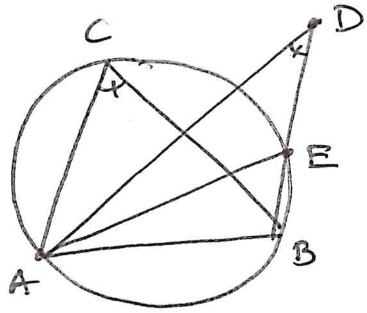
$\therefore\ \measuredangle ADB = \{\text{ytter}\measuredangle\text{satsen}\} =$

$= \measuredangle E + \measuredangle DBE = \{(i)+(ii)\} =$

$= \measuredangle ABD + \measuredangle DBE = \measuredangle ABE$ ∎

OH59: I $\triangle ABC$ och $\triangle ABD$ är $\measuredangle C = \measuredangle D$. Punkterna C och D ligger på samma sida om linjen AB. Visa att A, B, C, D ligger på en cirkel. (Rand∡satsens omvändning)

Bevis: Motsägelsebevis. Låt $k(O,r)$ omskriven cirkel till $\triangle ABC$. Antag $D \notin k(O,r)$. Två fall:

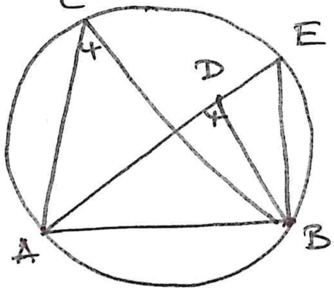


1) Antag D utanför $k(O,r)$. Låt $E = BD \cap k(O,r)$ och drag AE.

Då $\measuredangle C = \{\text{medelpunkts}\measuredangle\text{satsen}\} =$

$= \measuredangle AEB > \{\text{ytter}\measuredangle\text{satsen}\} > \measuredangle D =$

$= \{\text{givet}\} = \measuredangle C$ ↯ Går ej!



2) Antag nu D innanför $k(O,r)$.

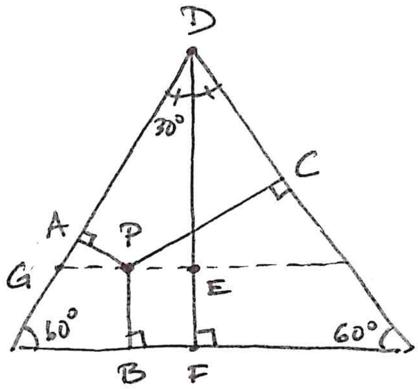
Låt $\{E\} = \text{strålen } AD \cap k(O,r)$ och drag BE.

Då $\measuredangle C = \{\text{medelpunkts}\measuredangle\text{satsen}\} = \measuredangle E < \{\text{ytter}\measuredangle\text{satsen}\} <$

$< \measuredangle ADB = \{\text{givet}\} = \measuredangle C$ ↯ Går ej!

$\therefore D \in k(O, r)$ ■

<u>OH60</u>: Drag normalerna från en punkt P inuti en liksidig Δ mot triangelns sidor. Visa att summan av dessa normalers längder är lika med längden av triangelns höjd.



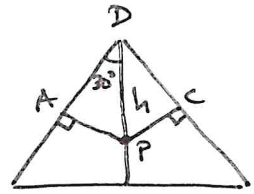
<u>Bevis</u>: Klart att $|PB| = |EF|$

Återstår att visa: $|AP| + |CP| = |DE|$

Hmm... för mycket symmetri!

Adopting a different point of view/

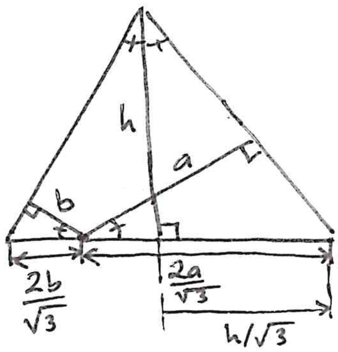
/Considering extreme cases



Antag P = E. Då $\measuredangle = 30° \Rightarrow$

$\Rightarrow |AP| = \frac{1}{2}|DP|, \quad |CP| = \frac{1}{2}|DP| \Rightarrow$

$\Rightarrow |AP| + |CP| = \frac{1}{2}|DP| + \frac{1}{2}|DP| = |DP|$



Det vi använder är $\measuredangle = 30°$ i rätvinkliga Δ.

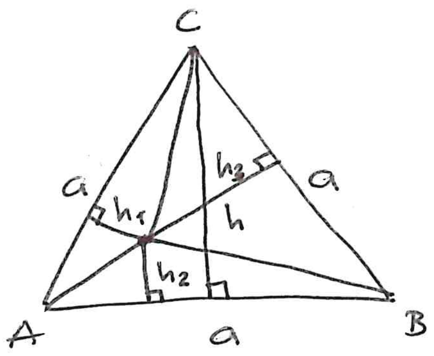
Tillbaka till det allmänna fallet!

LF3, v-v $\Rightarrow \measuredangle CPE = \measuredangle APG = 30° \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2a}{\sqrt{3}} + \frac{2b}{\sqrt{3}} = \frac{h}{\sqrt{3}} + \frac{h}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{2(a+b)}{\sqrt{3}} = \frac{2h}{\sqrt{3}}$$

$\therefore a + b = h$ ■

Alt. bevis: Drag PA, PB och PC



Beräkna arean av $\triangle ABC$ på två sätt:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ah$$

$$\shortparallel$$

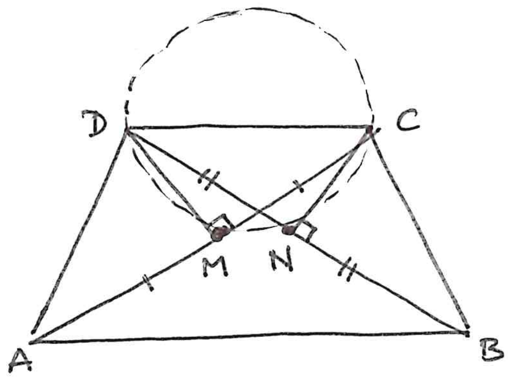
$$S_{\triangle ACP} + S_{\triangle ABP} + S_{\triangle BCP} =$$

$$= \frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 + \frac{1}{2}ah_3 = \frac{1}{2}a(h_1+h_2+h_3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h_1 + h_2 + h_3 = h \quad \blacksquare$$

Ex. Givet är ett parallelltrapets (som inte är en parallellogram). Cirkeln med diameter den kortare av de två parallella sidorna skär diagonalerna i deras resp. mittpunkter. Visa att de två icke-parallella sidorna är lika långa.

Bevis: Beteckna parallelltrapetset ABCD och låt M, N beteckna mittpunkterna på AC resp. BD.



Drag DM och CN.

Då $\measuredangle DMC = \measuredangle DNC =$ rät enligt medelpkt$\measuredangle$satsen

Studera $\triangle AMD$ och $\triangle CMD$.

$$\left.\begin{array}{l} |AM| = |CM| \\ \measuredangle AMD = \measuredangle CMD = \text{rät} \\ DM \text{ gemensam} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{s-v-s}]{\text{KF1}} \triangle AMD \cong \triangle CMD \text{ så } |AD| = |DC|$$

På samma sätt: $\triangle BNC \cong \triangle DNC$ så $|DC| = |CB|$

$$\therefore |AD| = |CB| \quad \blacksquare$$