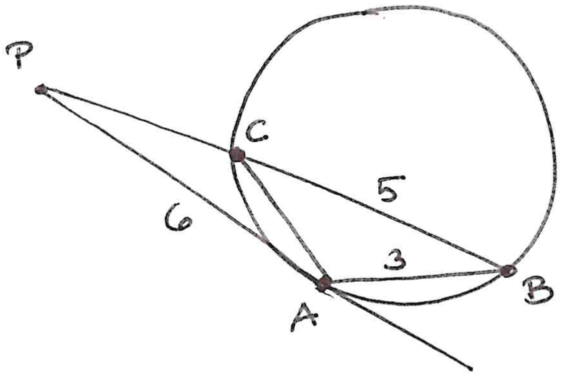
MVE365, Problemlösning och lärande

Lösningar tenta 15/3 -22

1. (a) Power of a point:



$6^2 = |BP| \cdot |CP|$ $(*)$

Låt $x = |CP|$. Då $|BP| = 5 + x$ så:

$(*) \Leftrightarrow 36 = (5+x) \cdot x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 5x - 36 = 0$

$x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 36 \cdot \frac{4}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \frac{13}{2}$

$\Rightarrow x_1 = 4$, $(x_2 = -9)$

$\therefore |BP| = 4 + 5 = 9$

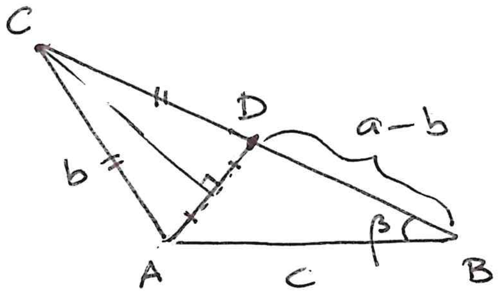
(b) Från (a) följer att:

Vi ser att: $\left.\begin{array}{l} \frac{|BP|}{|AP|} = \frac{3}{2} = \frac{|AP|}{|CP|} \\ \angle P \text{ gemensam} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{L.F. 1} \\ \text{S-V-S} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BPA \sim \triangle APC \Rightarrow \frac{|AC|}{3} = \frac{4}{6}$

$\therefore |AC| = 2$

2. Analys: Låt $D \in BC$ sådan att $|BD| = a-b$



Då är $\triangle ACD$ likbent

Mittpunktsnormalen till AD går genom C.

Konstruktion: Avsätt β längs AB så att vinkelspetsen hamnar i B. Avsätt $a-b$ längs vinkelns andra vinkelben. Låt D vara sträckans andra ändpunkt och drag AD. Låt C vara skärningen mellan mittpunktsnormalen till AD och strålen BD.

Då är $\triangle ABC$ den eftersökta triangeln.

Bevis: $C \in$ mittpunktsnormalen till AD $\Rightarrow$

$\Rightarrow |CA| = |CD|$.

Då $|CD| + (a-b) = |BC| = \left\{ \substack{\text{per} \\ \text{def.}} \right\} = a$

måste $|CD| = b$

$\therefore |CA| = b$ ∎

Utredning: Det krävs att $a-b < c$ ($\triangle$-olikheten)

Det krävs dessutom att mittpunktsnormalen till AD och strålen BD skär varandra, vilket kommer att ske sålänge $\measuredangle ADB$ är trubbig

3 (a) Sats 34 i Hanners kompendium

(b) Sats 35 – 38 i Hanners kompendium

4. (a) Omvändningen till Pythagoras sats

Likformighetsfall 3, v-v

(b) —

5 (a) Den matematiska tolkningen av funktionen är fakultet, dvs fjant(n) = n!

(b) Funktionen är skriven för att bestämma alla heltal mellan 3 och n, sådana att talet är lika med summan av fakulteterna av talets siffror.

För t.ex. ett 3-siffrigt tal abc ska alltså:

$$abc = a! + b! + c!$$

(c) En grov övre gräns vore att gå igenom alla 7-siffriga tal, dvs n = 9 999 999. Detta då den största 8-term-summa som kan erhållas är mindre än det minsta 8-siffriga talet:

$$8 \cdot 9! < 8.4 \cdot 10^5 = 3.2 \cdot 10^6 < 10^7 \leftarrow \text{minsta 8-siffriga talet}$$

6 (a) 1: $a = 444,\ b = 210$

$$b \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{444}{210} = 2 + \frac{24}{210}$$

2: $a = 210,\ b = 24$

$$b \neq 0 \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{210}{24} = 8 + \frac{18}{24}$$

3: $a = 24,\ b = 18$

$$b \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{24}{18} = 1 + \frac{6}{18}$$

4: $a = 18,\ b = 6$

$$b \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{18}{6} = 3$$

5: $a = 6,\ b = 0$

$$b = 0 \Rightarrow SGD(210, 444) = 6$$

Alternativt:

$$444 = 2 \cdot 210 + 24$$
$$210 = 8 \cdot 24 + 18$$
$$24 = 1 \cdot 18 + 6$$
$$18 = 3 \cdot 6 \Rightarrow SGD(210, 444) = 6$$

(b)

```
def SGD(a,b):
    if b > a:
        p = a
        a = b
        b = p
    while True:
        p = b
        b = a % b
        a = p
        if b == 0:
            return a
```

(c)
```
a = input("Ange a: ")
b = input("Ange b: ")
c = input("SGD eller MGM? ")

d = SGD(int(a), int(b))

if c == "SGD":
    print("SGD("+a+","+b+")="+str(d))
elif c == "MGM":
    print("MGM("+a+","+b+")="+str(int(a)*int(b)/d))
```

7. Bevisen av:

Andra kongruensfallet

Topptriangelsatsen

Medelpunktsvinkelsatsen

Kordasatsen

är några exempel.