Tavelpresentationer Grupp 1A

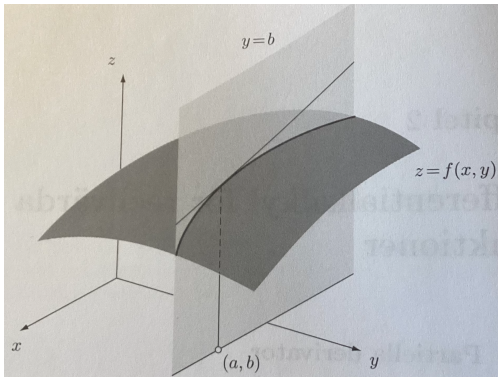
Oskar Andersson, Ludvig Fornstedt, Per-Ola Gradin,
Pelle Högstedt, Lucas Kuszli och Daniele Marabissi

21 January 2022

1 Partiella derivator

Avsnittet om partiella derivator ämnar, grovt förenklat, översätta derivatabegreppet ifrån en variabel till flera.

Vid studiet av funktioner med två variabler $f(x, y)$ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ inses snart att det i en punkt på en funktionsyta finns ett oändligt antal riktningars derivator att beakta.



Figur 1: z=f(x,y) och $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, [**1**].

Den partiella derivatan är ett specialfall där vi studerar två linjer vilka går igenom den aktuella punkten (a,b). Dessa båda linjer är parallella med respektive koordinataxel. Vi studerar alltså en variabels påverkan åt gången medans den andra hålls fix (se figur 1).

Om gränsvärdena

$$\lim_{h \to O} \frac{(f(a+h, b) - f(a, b))}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \tag{1}$$

$$\lim_{k \to O} \frac{(f(a, b+k) - f(a, b))}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \tag{2}$$

$\exists$ så sägs funktionen f vara partiellt deriverbar med avseende på x respektive y.

Beteckningen ∂ tydliggör att det är en derivata som avser fler variabler än den enda vi är vana vid.

Funktioner partialderiveras således två gånger för första derivatan, i tur och ordning med avseende på respektive variabel medans den andra hålls fix. Då detta görs är samtliga regler och standard derivator vi är vana vid ifrån en dimension alla applicerbara.

Detta tydliggörs ytterligare med följande exempel

$$\begin{aligned} f(x,y) =& xy^2 \\ \frac{\partial f}{\partial x} =& y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} =& 2yx. \end{aligned} \tag{3}$$

2 Kontinuitet i flera variabler (Differentierbarhet)

För att generalisera en ny definition som kan kompensera för partiella derivators brister så börjar vi med att studera kontinuitet i en variabel och två formuleringar om detta.

2.1 Formulering 1

Låt $\varrho(h)$ vara skillnaden mellan differenskvoten och derivatan och gör sedan en omskrivning

$$\begin{aligned} \varrho(h) =& \frac{(f(a+h) - f(a))}{h} - f'(a) \\ f(a+h) =& f(a) + hf'(a) + h\varrho(h). \end{aligned} \tag{4}$$

f är då deriverbar i $x = a$ om det finns en konstant $A \in \mathbb{R}$ som är lika med $f'(a)$ och en funktion $\varrho(h)$ där $\varrho(h) \to 0$ när $h \to 0$. Det vill säga:

$$f(a+h) = f(a) + Ah + h\varrho(h). \tag{5}$$

2.2 Formulering 2

En geometrisk tolkning utav formulering två kan föreställas som

$$\begin{aligned} x =& a + h \\ h =& x - a \\ f(x) =& f(a) + A(x-a) + (x-a)\varrho(x-a). \end{aligned} \tag{6}$$

Att $\varrho(h) \to 0$ innebär att det finns en unik tangentlinje till grafen i $x = a$.

2.3 Generalisering till två variabler

Det är värt att nämna att man kan generalisera detta till n variabler men i detta fall så visas bara med två variabler. Till en början så kan man generalisera formulering 3 genom att utöka den slutgiltiga geometriska tolkningen till en större dimension. Man får då att f är differentierbar om det finns ett unikt plan som tangerar grafen i punkten.

För att omdefiniera formulering 2 måste vissa antaganden göras det vill säga att $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ och är definierad i en omgivning av (a, b). f är då differentierbar i (a, b) om det finns konstanter $A, B \in \mathbb{R}$ och en funktion $\varrho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ där $\varrho(h, k) \to 0$ då $(h, k) \to 0$ sådant att

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + Ah + Bk + |\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}|\varrho(h, k). \tag{7}$$

Eftersom att man får att $f(a + h, b + k) \to f(a, b)$ så visar man där med kontinuitet.

3 Kedjeregeln

Vi kommer ihåg från envariabelanalysen att $(f(g(t)))' = f'(g(t)) \cdot g'(t)$, som också kan skrivas som $\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$ om $u = u(x)$ och $x = x(t)$.
För att kunna visa kedjeregeln i flera variabler definierar vi först $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ och $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, vilket ger att $f(g) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
Kedjeregeln generaliseras i fyra steg varav vi har berört tre denna veckan.

$$\begin{aligned} n \geq 1, p = 1, m = 1 \\ n = 1, p \geq 1, m = 1 \\ n \geq 1, p \geq 1, m = 1. \end{aligned} \tag{8}$$

Vi antar även att för samtliga fall ovan gäller att $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ och $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ är diffrentierbara och att a är en inre punkt i $\mathbb{R}^n$ sådan att a är en inre punkt i $D(g)$ och att $g(a)$ är en inre punkt i $D(f)$.

3.1 Kedjeregeln fall 1

Vi sätter $t = a$, vilket ger $\frac{d}{dt} f(g(t_1....t_n) = f'(g(t_1...t_n))\frac{dg}{dt_j}$. Detta kan också skrivas på ett mer kompakt sätt som $\frac{d}{dt_j} f(g(t)) = f'(g(t))\frac{dg}{dt_j}$. Det här följer från en variabel fallet $\frac{d}{dt_j}$ där de andra variablerna betraktas som konstanta vid derivering.

3.2 Kedjeregeln fall 2

Under tidigare antaganden blir kedjeregeln $\frac{d}{dt}f(g(t)) = \nabla f(g(t))\frac{dg}{dt}$. Ett alternativt skrivsätt om vi sätter $u = \vec{u} = u(x_1...x_n)$ och $\vec{x} = \vec{x}(t)$ är $\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx_1}\frac{dx_1}{dt} + ... + \frac{du}{dx_p}\frac{dx_p}{dt}$.

Beviset för detta finns på kurshemsidan.

3.3 Kedjeregeln fall 3

Om vi nu betraktar $\vec{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ där $p \geq 1, n \geq 1$ och där $\vec{t} = (t_1, ..., t_n)$ är en inre punkt i $D(g)$ och $\vec{g}(\vec{t})$ är en inre punkt i $D(f)$ sådan att den sammansatta funktionen $f(\vec{g}(\vec{t}))$ är differentierbar i punkten $\vec{t}$. Då följer på samma sätt som steg 2 att de partiella derivatorna med avseende på t kan skrivas

$$\frac{\partial}{\partial t_j} f(\vec{g}(\vec{t})) = \nabla f(\vec{g}(\vec{t}))\frac{\partial \vec{g}}{\partial t_j} \tag{9}$$

för $j = 1, ..., n$.

Alternativt kan detta skrivas ut som

$$\frac{\partial f}{\partial t_j} = \frac{\partial f}{\partial g_1}\frac{\partial g_1}{\partial t_j} + ... + \frac{\partial f}{\partial g_p}\frac{\partial g_p}{\partial t_j} \tag{10}$$

och även här för $j = 1, ..., n$.

Skillnaden från fall 2 är alltså att $\vec{t}$ kan innehålla fler än en dimension, och därav betraktar man partialderivatorna med avseende på de olika variablerna i $\vec{t}$, i övrigt används samma metod.

3.4 Tillämpning av kedjeregeln

Kedjeregeln kan vara en lämplig metod att använda sig av för att lösa partiella differentialekvationer, förkortat PDE. Idén är då att till exempel göra ett variabelbyte i planet $(x, y) \to (u, v)$, sådant att $f(x, y) = \tilde{f}(u, v)$. Man använder sedan omskrivning av partialderivator

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{11}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \tag{12}$$

för att sedan sätta in i PDE:n och förhoppningsvis få en ekvation som är lösbar.

4 Gradient och riktningsderivata

4.1 Gradient

Gradient är ett sätt att samla partiella derivator till ett enda begrepp.
Def: Om $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ och är differetierbar i $\vec{a} \in \mathbb{R}^n \implies$

$$\nabla f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) \\ ... \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Det vill säga gradienten av f är vektorn som innehåller alla f:s partiella derivator.
"∇" uttalas nabla.

4.2 Riktningsderivator

Vi kan av olika anledningar vilja veta vad derivatan är längs andra riktningar än $x_1, ..., x_n$. Här kommer riktningsderivatan in, låt $\hat{v}$ vara en normerad vektor i $\mathbb{R}^n$ ($||\hat{v}|| = 1$). Då är definitionen för riktningsderivata

$$f'_{\hat{v}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{a} + h\hat{v}) - f(\vec{a})}{h}. \tag{14}$$

Ur detta följer satserna "2.4.6" och "2.4.7".

4.2.1 Sats 2.4.6

Om $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, är differentierbar i $\vec{a}$ och $\vec{a}, \hat{v} \in \mathbb{R}^n$
$\implies \exists f'_{\hat{v}}$ och $f'_{\hat{v}} = \nabla f(\vec{a}) \cdot \hat{v}$. OBS! $||\hat{v}|| = 1$
Bevis: Antag att f är differentierbar i $\vec{a} \implies$

$$f(\vec{a} + h\hat{v}) = f(\vec{a}) + \nabla(\vec{a}) \cdot (h\hat{v}) + ||h\hat{v}||\rho(h\hat{v}). \tag{15}$$

Eftersom vi har antagit differentierbarhet $\implies \rho(\vec{x}) \to 0$ då $\vec{x} \to 0$,

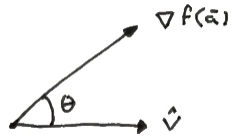
$$||h\hat{v}|| = |h|||v|| = 1|h| = |h| \implies$$

$$f'_{\hat{v}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{a} + h\hat{v}) - f(\vec{a})}{h} = \nabla(\vec{a}) \cdot \hat{v}. \tag{16}$$

4.2.2 Sats 2.4.7

Ur sats 2.4.7 följer sats 2.4.6.

Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vara differentierbar i $\vec{a} \in \mathbb{R}^n \implies \nabla f(\vec{a})$ är riktningsderivatan med maximal tillväxthastighet i $\vec{a}$. Tillväxthastighetens storlek är $||\nabla f(\vec{a})||$. För detta gavs ett geometriskt bevis i $\mathbb{R}^2$.
Bevis: Eftersom att vi vet att $f'_{\hat{v}}(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \hat{v}$ kan vi utgå från följande bild.



Ur detta får vi

$$f_{\hat{v}}(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \hat{v} = ||\nabla f(\vec{a})||||\hat{v}|| \cos(\theta) = ||\nabla f(\vec{a})|| \cos(\theta),$$

ty $||\hat{v}|| = 1$. $\implies$ $f'_{\hat{v}}(\vec{a})$ är som störst då $\cos(\theta) = 1$ $\implies$ $\nabla f(\vec{a})$ och $\hat{v}$ måste vara parallella och lika riktade för maxvärdet.

5 Nivåkurvor

Def:

Låt $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ och $C \in \mathbb{R}$, där C är en konstant. Då definierar funktionen $f(x_1, ..., x_n) = C$ vanligtvis en n-dimensionell (hyper)yta i $\mathbb{R}^{n+1}$.

Speciellt säger vi att:
$n = 1$ ger en nivåkurva i $\mathbb{R}^2$
$n = 2$ ger en nivåyta i $\mathbb{R}^3$
$n > 2$ ger en nivåhyperyta i $\mathbb{R}^{n+1}$.

Om vi har ett hyperplan (se figur nedan) och antar att:

f är differentierbar i $\vec{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\hat{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\|\hat{v}\| = 1$ i någon rikting och $\hat{v}$ är tangent rikting till ytan $f(\vec{x}) = C$ i $\vec{a}$ blir:

$f'_{\hat{v}} = 0 \iff \nabla f(\vec{a}) \cdot \hat{v} = 0 \iff \nabla f(\vec{a}) \perp \hat{v}$.

Detta innebär att alla tangentriktningar är ortogonala mot $\nabla f(\vec{a}) \iff \nabla f(\vec{a})$ är normal till hyperplanet/tangentplanet.

6 Derivator av högre grad

Notation:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_k})$ alternativt $f''_{x_k x_j}$ eller f''_{kj} om $j = k$.

Terminologi:

Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $k \geq 0$ är ett heltal.
Då säger vi att $f \in C^k(D)$ om alla dess partiella derivator av grad $\leq k$ existerar och är kontinuerliga i hela D
Om $f \in C^k(D)$ spelar det ingen roll vilken ordning vi utför partiell derivering upp till grad k.

Referenser

[1] Analys i flera variabler. Böiers, Lars-Christer och Persson, Arne. Studentlitteratur AB (2005). Sida 46.