

Föreläsningssammanfattningar

R. Baker, N. Barywani, E. Frännhag, A. Jirholt, E. Ljungberg, S. Söderqvist

Lp3 2022

1 vecka 1

1.1 Föreläsning 1

I Flervariabelanalysen jobbar vi med funktioner där:

$$f : R^n \rightarrow R^m. \quad (1)$$

Detta betyder att i både definition- och värdemängden kan vi behöva hantera mer än 1 variabel. Dock, till att börja med, kan vi ta fallen där $f : R^2 \rightarrow R$ eller $(x, y) \mapsto z$.

1.1.1 omformulering av derivata med en variabel

Till att börja tar vi det vi redan vet och formulerar om det (obs, $f : R \rightarrow R$ är definierad i en omgivning för en punkt a):

Formulering 1 $\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \Rightarrow f$ är deriverbar i a .

Formulering 2 Låt $\varrho(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$. där $\varrho(h) \rightarrow 0$ då $h \rightarrow 0$ Dessutom, om vi sätter $A = f'(a)$ (givet att ett sådant A finns) så går det att formulera $f(a+h) = f(a) + Ah + \varrho(h)h$.

Formulering 3 Det existerar en unik tangent linje till grafen f ; $f(x) = f(a) + Af(x-a)$.

Formulering 3 kan man härleda genom att sätta $x = a + h$. Då är $f(x) = f(a) + A(x-a) + (x-a)\varrho(x-a)$. Om vi analyserar funktionen ϱ kan vi se att $(x-a)\varrho(x-a)$ kommer minska otroligt snabbt när $h \rightarrow 0$. Om vi utesluter den sista produkten i ekvationen får vi en linärisering som representerar den unika tangent linjen i grafen.

1.1.2 Partiella derivator i R^2

Med hjälp av definitionen för derivatan av en funktion med en variabel kan vi definiera derivatan till funktioner med två variabler. Vi börjar med omgivningar. I Flervariabelanalysen, när vi ska uttrycka en omgivning runt vektorn $\vec{a}$ så skriver vi enl. följande,

$$\vec{a} \in R^2; \{\vec{x}; \|\vec{x} - \vec{a}\| < \varepsilon\}. \quad (2)$$

Fortsättningsvis antag: $f : R^2 \rightarrow R$ är definierad i en omgivning $\vec{a}$ där $\vec{a} = (a, b)$. Om vi formulerar en differenskvot för $f'(\vec{a})$ får vi,

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a,b)}{\|(h,k)\|}. \quad (3)$$

Detta kan vara svårt att beräkna så istället kan vi närma oss via antingen x eller y axeln medan man låter den andra variabeln vara konstant. Detta kallas partiell derivata och kan variera beroende på vilken variabel i Definitionsmängden som man väljer att definiera som konstant.

Partiell derivata för x :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a,b)}{h}. \quad (4)$$

För y :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a,b)}{k}. \quad (5)$$

En följd av deriverbarhet i envariabel analysen är kontinuitet men detta går inte att anta på samma sätt i flervariabel analysen.

1.2 Föreläsning 2

1.2.1 Differentierbarhet

I envariabelsanalysen vet vi att deriverbarhet $\implies$ kontinuitet; deriverbarhet är ett starkare begrepp än kontinuitet i envariabelsfallet. I förel 2 såg vi att det inte gäller för flervariabelsfunktioner.

Vi tittade på två exempelfunktioner där de partiella derivatorna existerade men funktionerna ändå inte var kontinuerliga.

Begreppet differentierbarhet infördes, och differentierbarhet $\implies$ kontinuitet.

Differentierbarhet definierades på två sätt:

Grafisk definition: Vi säger att f är differentierbar i en punkt (a,b) om det finns ett *unik* plan som tangerar grafen i punkten.

Formell definition: Antag $f : R^2 \rightarrow R$ def. i en omg. av (a,b) . f är då differentierbar i (a,b) om det finns konstanter A, B och en funktion $\rho : R^2 \rightarrow R$ s.a. $f(a+h, b+k) = f(a,b) + Ah + Bk + \left\| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\| \rho(h,k)$ där $\rho(h,k) \rightarrow 0$ när $(h,k) \rightarrow (0,0)$

1.2.2 Gradienten

Med differentierbarhet kan gradienten definieras, vektorn av alla partiella derivator, ungefär derivatans motsvarighet i flervariabelsfallet.

Def. (Gradienten) Om $f : R^n \mapsto R$ är differentierbar i $\vec{a} \in R^n$ definierar vi gradienten i $\vec{a}$: $\nabla(f(\vec{a})) = \text{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

1.2.3 Koppling mellan differentierbarhet och tangentplan (i R^3)

Låt $f : R^2 \mapsto R$ vara en funktion som är differentierbar i (x_0, y_0) och låt tangentplanet till f i (x_0, y_0, z_0) ha normalvektorn

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} E \\ F \\ G \end{pmatrix}$$

Låt vidare (x, y, z) vara en godtycklig punkt i tangentplanet $\implies$

$$\implies \vec{v} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$$

är en godtycklig vektor i tangentplanet. $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \implies E(x - x_0) + F(y - y_0) + G(z - z_0) = 0$. Sätt $x_0 = a$, $y_0 = b$, $z_0 = f(a, b)$, $h = x - x_0$, $k = y - y_0$ och jämför med definitionen av differentierbarhet. Vi ser då bl.a. att

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} E \\ F \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix}$$

1.3 Föreläsning 3

1.3.1 Sats 2.2,3

Först en **Notation** innan vi påbörjar satsen:

Låt $f : R^n \rightarrow R$ och D vara en öppen och sammanhängande mängd i R^n . Vi skriver $f \in C^1(D)$ vilket betyder att f tillhör klassen 'C ett D' om alla partiella derivator $f'_{x_1}, \dots, f'_{x_n}$ existerar i hela D och dessa är kontinuerliga funktioner av n variabler. Nu till satsen.

Sats

$f \in C^1(D) \Rightarrow f$ är differentierbar i hela D .

Bevis: (för $n = 2$) Vi kan påbörja beviset med ett antagande:

$$f : R^2 \rightarrow R,$$

$D \subseteq R^2$ där D är en öppen mängd

och antag $f \in C^1(D)$ i en godtycklig punkt (a,b) .

(obs! vi utgår från $n = 2$ eftersom idén är även samma för $n > 2$). Visa då att f är differentierbar i samma punkt, (a,b) .

Enligt ovan

$$f \in C^1(D) \Rightarrow \exists f'_x(a,b), f'_y(a,b). \quad (6)$$

Nu återstår det att visa att $\varrho(h,k) \rightarrow 0$ då $(h,k) \rightarrow (0,0)$ där;

$$\varrho(h,k) = \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - hf'_x(a,b) - kf'_y(a,b)}{\sqrt{h^2 + k^2}}. \quad (7)$$

Genom att göra en del omskrivningar, definiera en ny funktion $\Psi(h)$ och använda medelvärdessatsen (i envariabelanalysen) för att omdefiniera $\Psi(h) - \Psi(0)$, får vi ut kvoten.

$$\frac{h(f'_x(a + \theta_1 h, b) - f'_x(a, b)) + k(f'_y(a + h, b + \theta_2 k) - f'_y(a, b))}{\sqrt{h^2 + k^2}} \quad (8)$$

Där $\theta_1 \in (0,1)$ och $\theta_2 \in (0,1)$. De är alltså begränsade funktioner. Vidare för alla h,k gäller

$$\begin{aligned} \left| \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| &\leq 1, \\ \left| \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| &\leq 1 \\ &\Rightarrow \end{aligned} \quad (9)$$

$$|\varrho(h,k)| \leq |f'_x(a + \theta_1 h, b) - f'_x(a, b)| + |f'_y(a + h, b + \theta_2 k) - f'_y(a, b)|.$$

Ha i åtanke att θ_1 och θ_2 är begränsade. Om vi sedan låter $(h,k) \mapsto (0,0) \Rightarrow$

kommer
$$\begin{aligned} f'_x(a + h\theta_1, b) &\rightarrow f'_x(a, b) \\ f'_y(a + h, b + \theta_2 k) &\rightarrow f'_y(a, b) \end{aligned} \Rightarrow \varrho(h,k) \rightarrow 0 \text{ då } (h,k) \mapsto (0,0).$$

1.3.2 Kedjeregeln

Vi låter två funktioner g och f vara:

$$g : R^n \rightarrow R^p, \quad (10)$$

$$f : R^p \rightarrow R^m. \quad (11)$$

Där den sammansatta funktionen är:

$$f \circ g : R^n \rightarrow R^m, \quad (12)$$

som kan även skrivas som:

$$(f \circ g)(t_1, \dots, t_n) = f_1(g_1(t_1, \dots, t_n), \dots, g_p(t_1, \dots, t_n)) \dots f_m(g_1(t_1, \dots, t_n), \dots, g_p(t_1, \dots, t_n)). \quad (13)$$

Vi ska generalisera kedjeregeln i 4 steg, för att sedan få en slutlig formel.

För alla steg råder samma antagande (Antagande 1):|| Funktionerna g och f är differentierbara och $\vec{a} \in R$ sådant att $\vec{a}$ inre punkt i definitionsmängden av g . Dessutom att $g(\vec{a})$ är inre punkt i definitionsmängden av f .

Steg 1: $n \geq 1, p = 1, m = 1$

Under antagande 1 är: $(f \circ g)$ differentierbar i $\vec{t} = \vec{a}$ och

$$\frac{\partial}{\partial \cdot t_j} \cdot f(g(\vec{a}))|_{\vec{t}=\vec{a}} = f'(g(\vec{t}))|_{\vec{t}=\vec{a}} \frac{\partial g}{\partial t_j}(\vec{a}) \quad (14)$$

för alla $j = 1, \dots, n$ Denna följer av en variabel fallet som visas nedan.

$$(f \cdot g)(x) = f'(g(x)) \cdot g(x) \quad (15)$$

Steg 2: $n = 1, p \geq 1, m = 1$

Låt funktionen f vara en skalärvärd funktion av n variabler, $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ så att $x_1 = g_1(t), \dots, x_n = g_p(t)$. Då fås sammansättningen $f(\vec{g}(t))$. Antag att $g_1, \dots, g_p$ är deriverbara i intervallet $t \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Då fås vid derivering.

$$\frac{d}{dt}f(\vec{g}(t)) = \frac{\partial f}{\partial \vec{g}(t)} \cdot \frac{d\vec{g}}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial \vec{g}(t)} \cdot \frac{dg_p}{dt} \quad (16)$$

Bevis för påståendet där $p = 2$ finns på s. 66 i Persson & Böiers.

Steg 3: $n \geq 1, p \geq 1, m = 1$

Låt funktionen $u(\vec{x})$ vara en skalärvärd funktion av n variabler där $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$. Låt dessutom $\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_m)$ så att $u(\vec{x}(\vec{t})) = u(x_1(t_1, \dots, t_m), \dots, x_p(t_1, \dots, t_m))$. Under förutsättningen att $u(\vec{x})$ och $x_1(\vec{t}), \dots, x_p(\vec{t})$ alla tillhör C^1 blir den partiella derivatan med avseende på variabeln t_j

$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_p} \cdot \frac{\partial x_p}{\partial t_j} \quad (17)$$

Bevis för påståendet är mycket likt det för $n = 1, p \geq 1, m = 1$. Den stora skillnaden är att man väljer en riktning t_j från $\vec{t}$ och partialderiverar m.a.p denna så att de övriga variablerna hålls konstanta.

1.4 Föreläsning 4

1.4.1 Implikationer av kedjeregeln på PDE

Används bland annat för variabelbyten i planet. Ibland skriver man om funktioner med hjälp av variabelbyten och då vill vi hitta de partiella derivatorna för vår nya funktion. Om man applicerar det på variabelbytet $f(x, y) = f(u, v)$ kan de partiella derivatorna skrivas enligt kedjeregeln som

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (18)$$

1.4.2 Riktningsderivator

Definitionen av riktningsderivata är som följande:

För vektorn $\vec{v} \in \mathbb{R}^n, \|\vec{v}\| = 1$ är riktningsderivatan av f i riktningen $\vec{v}$ i punkten $\vec{a}$

$$f'_{\vec{v}}(\vec{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + \vec{v}h) - f(\vec{a})}{h}. \quad (19)$$

Men definitionen är väldigt jobbig att räkna med, det är därför enligt sats 6 på sida 78 i Persson & Böiers som vi använder

$$f'_{\vec{v}}(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{v} \quad (20)$$

när vi räknar med riktningsderivatan.

1.4.3 Nivåkurvor

Definitionen lyder:

Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$ och c är konstant så kommer ytan beskrivas av $f(\vec{x}) = c$.

$f(\vec{x}) = c$ beskriver oftast en n -dim yta i $\mathbb{R}^{n+1}$ men inte alltid.

Nivå kurvan kallas olika beroende på vilket rum man befinner sig i, om $n = 1$ kallas det för nivåkurva och det befinner sig i $\mathbb{R}^2$. Om $n = 2$ kallas det

nivåyta och den befinner sig i $\mathbb{R}^3$ och om $n > 2$ kallas det för en nivå-hyperyta som befinner sig i $\mathbb{R}^{n+1}$

1.4.4 Derivator av högre ordning

För derivatorn av högre ordning används notationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \quad (21)$$

som är först partiella derivaten med avseende på x_k och sedan x_j . Men man kan även skriva $f''_{x_k x_j}$. Om $k = j$ kan man skriva

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \quad (22)$$

1.4.5 Terminologi

Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, k \geq 0, k \in \mathbb{R}, D \in \mathbb{R}^n$ och är en öppen mängd. Kommer $f \in C^k(D)$ om alla partiella derivator finns av grad k och är kontinuerliga i hela D . Detta funkar för Clairouts sats som säger att det spelar ingen roll vilken ordning vi tar de partiella derivatorna i. Beviset för Clairouts sats när $k = 2, n = 2$ finns på sida 87 i Persson & Böiers.