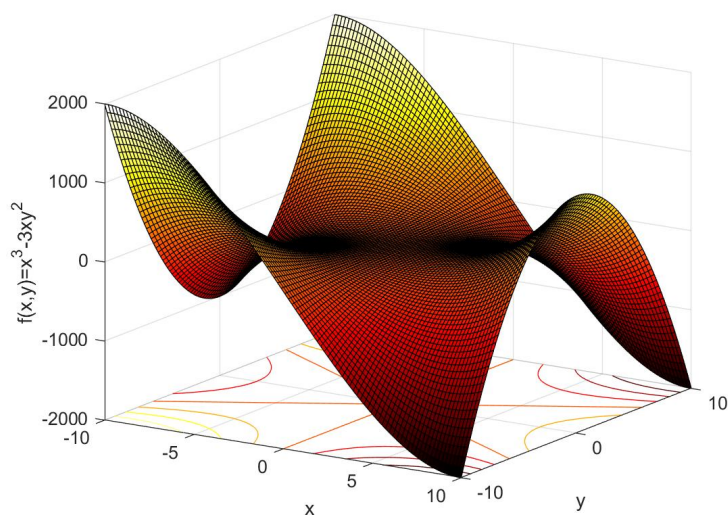


Sammanfattning av föreläsningar i MVE035, LV1

Eric Björndal, Nils Grimbeck, Linus Hagedorn, Ylva Liljegren,
Christian Russberg, Alexander Spetz

Januari 2022

1 Derivata i flera variabler



Figur 1: Ytan $z = x^3 - 3xy^2$

Då vi går från en till flera variabler blir derivatabegreppet

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad (1)$$

något problematiskt eftersom vi kan närma oss baspunkten, a , från oändligt många riktningar till skillnad från envariabelanalysens 2 (vänster och högergränsvärden

i differenskvoten (1)). Man finner lätt att detta medför att derivatan i flera variabler är beroende på längs vilken kurva vi närmar oss a . Betrakta exempelvis figuren ovan som visar grafen för funktionen $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ och undersök derivatan i punkten $(9, 0)$. Närmar vi oss längs y -axeln är derivatan lika med noll men närmar vi oss längs en annan riktning är derivatan nollskilld. Vi är därför i behov av ett entydigt begrepp för förändringshastigheten i en punkt för funktioner av flera variabler.

Om gränsvärdet för derivatans definition existerar kan vi definiera funktionen

$$\rho(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a), \quad (2)$$

vilken genom algebraisk manipulation kan skrivas som

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\rho(h). \quad (3)$$

Vi byter ut $f'(a)$ mot en okänd konstant A . En funktion som uppfyller denna ekvation kallas differentierbar i a om det finns en funktion $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ så att $\rho(h) \rightarrow 0$ då $h \rightarrow 0$ och en konstant A . Generaliserar vi detta till n dimensioner har vi att $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är en differentierbar funktion om vi kan skriva

$$f(\vec{a} + \vec{h}) = f(\vec{a}) + h_1 A_1 + \dots + h_n A_n + \|\vec{h}\| \rho(\vec{h}) \quad (4)$$

för några konstanter A_j , där $j = 1, \dots, n$ och för en funktion $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ så att $\rho(\vec{h}) \rightarrow 0$ då $\vec{h} \rightarrow 0$. Vidare ger detta följande sats.

Sats 1. Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Om f är differentierbar i $\vec{a}$, så är f kontinuerlig i $\vec{a}$.

Bevis. Låt $\vec{h} \rightarrow \vec{0}$ i (4). Detta ger direkt att $f(\vec{a} + \vec{h}) \rightarrow f(\vec{a})$ då $\vec{h} \rightarrow \vec{0}$. $\square$

2 Partiella derivator

Som tidigare nämnts kan en funktion ha olika derivator i en punkt beroende på vilken riktning vi går mot punkten. Det kan vara av intresse att undersöka derivatan längs samma riktning som en av basvektorerna, $\vec{e}_i$, och vi säger då ett detta är en partiell derivata med avseende på x_i .

Definition 1. Låt $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ och $\vec{a} \in D_f$. För $i \in \{1, \dots, n\}$ gäller

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{e}_i) - f(\vec{a})}{h} \quad (5)$$

om gränsvärdet existerar och f är definierad i en omgivning av $\vec{a}$.

Vi kan nu ge en innebörd av vad konstanterna A_i i (4) kommer att vara. Genom att sätta in att $h_j = 0$ för alla $j \neq i$ i (4) och göra en omskrivning samt låta $h_i \rightarrow 0$ får vi att

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}).$$

Ibland vill vi visa att en funktion är differentierbar och vi kan nu med dessa partiella derivator visa det med hjälp av följande definition och sats.

Definition 2. Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en öppen och sammahängande mängd. Låt $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ så att alla partiella derivator till f existerar och är kontinuerliga i D . Då säger vi att f tillhör klassen $C^1(D)$.

Sats 2. Om $f \in C^1(D)$, då gäller det att f är differentierbar i D .

3 Partiella derivator av högre grad

Om en funktions $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ partiella derivata är partiellt differentierbar så kan man bilda partiella derivator av högre grad. Detta skrivs $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)$ för $j, k = 1, \dots, n$. Denna notation är olämplig för högre grad så vi använder oftast andra notationer som exempelvis $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ eller $f''_{x_j x_k}$.

Om $j = k$ skriver vi $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$.

Vi kan utöka definition 2 till att f tillhör klassen $C^k(D)$ om alla partiella derivator till f av ordning till och med k existerar och är kontinuerliga i D .

Sats 3 (Clairauts sats). Om $f \in C^k(D)$, då är partiella derivatan till f av ordning $\leq k$ oberoende av ordningen vi deriverar med avseende på.

Med denna sats kan det bli enklare att partiell derivata en funktion.

4 Gradient

Som nämnts tidigare anger de partiella derivatorna hur funktionen uppför sig längs med koordinataxlarna. Genom att betrakta villkoret för differentierbarhet ser man att alla de partiella derivatorna ingår och innehåller möjligen mer information om funktionen i en viss punkt. Genom att betrakta delen $A_1h_1 + \dots + A_nh_n$ i (4) gör vi följande definition.

Definition 3. Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vara en differentierbar funktion. Gradienten definieras som

$$\nabla f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) (\vec{x}). \quad (6)$$

Då kan man skriva det på ett mer kompakt sätt med hjälp av skalärprodukt

$$A_1h_1 + \dots + A_nh_n = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{h}. \quad (7)$$

Speciellt sägs att gradienten är motsvarigheten till $\frac{d}{dx}$ i envariabelfallet.

5 Riktningsderivata

Om man vill undersöka en differentierbar funktion $f(\vec{x})$ längs en rät linje $\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}$ i punkten $\vec{a}$ med riktning $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ där $||\vec{v}|| = 1$, används riktningsderivata. Denna definieras som

$$f'_{\vec{v}}(\vec{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + t \cdot \vec{v}) - f(\vec{a})}{t}. \quad (8)$$

I praktiken vid räkning använder vi oss av följande sats.

Sats 4. Om $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är differentierbar i punkten $\vec{a}$ så är

$$f'_{\vec{v}}(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{v}. \quad (9)$$

Notera speciellt att om riktningsvektorn $\vec{v}$ är en enhetsvektor $\vec{e}_j$, för $j = 1, \dots, n$, så fås den partiella derivatan per definition. Denna sats medför även att gradienten är riktad längs den största ökningen i $\vec{a}$, ty

$$f'_{\vec{v}}(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{v} = \|\nabla f(\vec{a})\| \|\vec{v}\| \cos \theta,$$

där θ utgör vinkeln mellan gradienten och riktningsderivatan. Detta ger att $f'_{\vec{v}}(\vec{a})$ är maximerad då $\nabla f(\vec{a})$ och $\vec{v}$ är parallella och likriktade. Det går även att visa detta algebraiskt med hjälp av Cauchy-Schwarz olikheten.

6 Nivåytor

När vi har funktioner av flera variabler kan dessa vara svåra att lösa helt explicit vilket ger oss anledning att försöka lösa dessa uttryck implicit istället.

Låt en funktion $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ och en konstant $c \in \mathbb{R}$. Då definierar vanligtvis ekvationen

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = c \quad (10)$$

en n -dimensionell yta i $\mathbb{R}^{n+1}$.

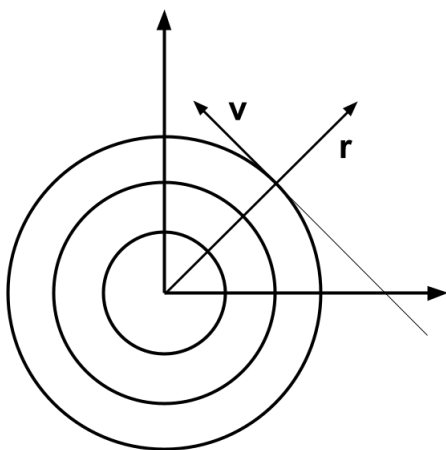
När $n = 1$ kallas den yta som definierades med ekvation (10) för en nivåkurva i $\mathbb{R}^2$. Då $n = 2$ kallas ytan för en nivåyta i $\mathbb{R}^3$ och för $n > 2$ kallas den definierade ytan för en nivåhyperyta i $\mathbb{R}^{n+1}$. Dock gäller det inte att ekvation (10) alltid definierar en yta och detta kan exempelvis ses genom att observera följande uttryck: $x^2 + y^2 + z^2 = -1$ där $x, y, z \geq 0$ vilket kan tolkas som alla punkter på halvsfären med radien $r = \sqrt{-1}$ vilket inte ger någon yta i $\mathbb{R}^3$.

Nu kan man gå vidare med dessa ytorna som definierades av ekvation (10) vilket ger följande sats.

Antag att $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är differentierbar och låt $\vec{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$ och en vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$ där $\|\vec{v}\| = 1$. Vidare om $\vec{v}$ är en tangenriktning till ytan som definieras av $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = c$ så gäller följande i $\vec{a}$ att

$$f'_{\vec{v}}(\vec{a}) = 0 \leftrightarrow \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{v} = 0. \quad (11)$$

Alltså är $\vec{v}$ och $\nabla f(\vec{a})$ är ortogonala mot varandra. Figuren nedan, där $\mathbf{r}$ pekar i gradientens riktning och vektorn $\vec{v}$ utgör en tangenriktning till ytan, illustrerar denna sats. Notera hur detta ger oss ett enkelt sätt att bestämma största lutningen i punkten $\vec{a}$ vilket är av intresse vid extrempunktsundersökningar.



Figur 2: Visualisering av att $\vec{v}$ och $\nabla f(\vec{a})$ är ortogonala.

7 Kedjeregeln

Nu när vi bekantat oss med differentierbarhet, partiella derivator och gradient kan vi expandera kedjeregeln till flera variabler. Vi känner igen kedjeregeln från envariabelanalysen. Tag funktionerna f och g , där g är deriverbar i punkten x och f i $g(x)$. Då är derivatan av den sammansatta funktionen

$f \circ g$ i punkten x lika med $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}$.

Inför generaliseringen börjar vi med att formulera vad en sammansatt funktion i flera variabler är. Låt $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ och $f : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^m$. Om $p = q$ gäller att sammansättningen $f \circ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ kan göras.

Under läsvecka 1 generaliserades kedjeregeln endast för skalärvärda flervariabla funktioner. Först när teorin kring vektorvärda funktioner introducerats kan en helt generaliserad formulering av kedjeregeln presenteras. För de skalärvärda funktionerna kan tre olika formuleringar göras för olika värden på n och p . Dessa fall är:

Fall 1: $n \geq 1, p = 1, m = 1$

Fall 2: $n = 1, p \geq 1, m = 1$

Fall 3: $n \geq 1, p \geq 1, m = 1$.

I alla tre fallen antar vi att g och f är differentierbara och att för ett godtyckligt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ gäller att $\vec{a} \in D(g)$ och $g(\vec{a}) \in D(f)$.

Fall 1: $n \geq 1, p = 1, m = 1$. Det gäller att

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = f'(g(\vec{x})) \frac{\partial g}{\partial x_j}. \quad (12)$$

Beviset för detta följer direkt ur envariabelanalysen då det handlar om en partiell derivata med avseende på variabeln x_j ; alla $x_i \neq x_j$ kan betraktas som konstanter och operationen är i praktiken identiskt lika en derivation av en funktion av en variabel.

Fall 2: $n = 1, p \geq 1, m = 1$. Det gäller att

$$\frac{d}{dx} f(\vec{g}(x)) = \nabla f(\vec{g}(x)) \cdot \frac{d\vec{g}}{dx} = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial g_i} \frac{dg_i}{dx}.$$

Beviset för detta utgår från att man vill visa existensen av gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h},$$

där $F(x) = f(\vec{g}(x))$ och att detta är lika med $F'(a) = \nabla f(\vec{g}(a)) \cdot \frac{d\vec{g}}{dx}(a)$. Detta uppnås genom att med hjälp av ansättningen $\vec{a} = (g_1(a), \dots, g_p(a))$ och $\vec{h} = h \left(\frac{d\vec{g}}{dx}(a) + \vec{\rho}(h) \right)$ skriva om $\vec{g}(a + h)$ till $\vec{a} + \vec{h}$, för att sedan applicera definitionen för differentierbarhet på F och bevisa existensen och ekvivalensen. Beviset i sin helhet hänvisas till föreläsningssanteckningarna samt kursboken.

Fall 3: $n \geq 1$, $p \geq 1$, $m = 1$. Det gäller att

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(\vec{g}(\vec{x})) = \nabla f(\vec{g}(\vec{x})) \cdot \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial g_i} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}.$$

Beviset följer av 2) precis som 1) följer av envariabelanalysen, då vi endast tittar på en partiell derivata där alla $x_i \neq x_j$ kan betraktas som konstanter.