

Sammanfattning lv. 2 Tavelpresentationer

Emma Chan, Adam Granquist, Alva Limbäck, Elin Ekstedt,
Felix Hörnfeldt, Daniel Blania

Januari 2022

1 Variabelbyte i flera variabler - 2:a ordningen

Partiella differential ekvationer löses precis som innan, det som läggs till nu är $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial xy}$ och $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. För att lösa dessa kan variabelbyte användas. Observera att följande som beskrivs är en generalisering. Oftast går det att sätta in värden i derivatorna då det finns ett uttryck för u respektive v . Härnadan kommer derivatorna endast uttryckas som $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ samt $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x}$ och $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}$.

Antag $u(x, y)$ och $v(x, y)$, vilket ger:

$$f(x, y) = f(u(x, y), v(x, y)) \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

Detta är första partiella derivatan, vilket förklarades under LV 1. Den andra partiella derivatan kan beräknas genom:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (3)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (4)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (5)$$

Observera att $\frac{\partial f}{\partial u}$ och $\frac{\partial f}{\partial v}$ beror av både u och v som i sin tur beror av x och y . Detta betyder att produktregeln kommer behöva användas på de två termerna. Om vi kollar först på den första termen, blir det:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (6)$$

På samma sätt görs det på den andra termen vilket ger uttrycket:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (7)$$

Vi kan nu observera $\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} \right)$ och $\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} \right)$ för att sedan utveckla med kedjereglen igen. Vi kan kolla på hur det blir på första termen:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad (8)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (9)$$

Den andra termen räknas ut på samma sätt och med dessa två utvecklade termer kan vi slutligen sättas ihop till ett stort uttryck:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (10)$$

Med användning av Clairauts sats kan vi kombinera $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$ och $\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$ för att sedan skriva uttrycket som:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (11)$$

Detta uttryck kan uppfattas som komplicerat, däremot poängterades det igen att det oftast finns värden att sätta in i $\frac{\partial u}{\partial x}$ och $\frac{\partial v}{\partial x}$ vilket gör uttrycket lättare att hantera. För att lösa $\frac{\partial^2 f}{\partial x y}$ och $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ används samma metod. Det finns även konkreta exempel som tas upp i boken. Det rekommenderas att studera exempel 27 (sid. 89) samt exempel 28 (sid. 92).

2 Taylorutveckling i flera variabler

För att göra en Taylorutveckling i flera variabler är det bra att först observera Taylorutveckling i en variabel.

$$f(a+h) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(a)}{j!} \cdot h^j + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} \cdot h^{k+1} \quad (12)$$

Där

$$\sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(a)}{j!} \cdot h^j \quad (13)$$

är Taylorpolynomet av grad k och

$$\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} \cdot h^{k+1} \quad (14)$$

är resttermen för något $\xi \in (a, a+h)$. Denna term kan därefter skrivas om till $\mathcal{O}(h^{k+1})$.

Taylorutveckling i flera variabler handlar om att bilda en funktion som ursprungligen är av flera variabler till en funktion av en variabel. Därefter kan den skrivas med hjälp av formuleringen ovan. Om vi börjar med en funktion av två variabler,

$$f(x, y), f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^{k+1} \quad (15)$$

där vi vill Taylorutveckla kring en baspunkt (a, b) . Detta kan göras genom att fixera h och k för att sedan bilda en en-variabels funktion,

$$F(t) = f(a + t \cdot h, b + t \cdot k) \quad (16)$$

Med $F(t)$ kan vi Taylorutveckla kring $t=0$. Detta är väldigt logiskt eftersom om $t=0$ så får vi $f(a, b)$ vilket är det vi vill ha.

$$F(t) = \sum_{j=0}^k \frac{F^{(j)}(0)}{j!} \cdot t^j + \frac{F^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} \cdot t^{k+1} \quad (17)$$

För något $\xi \in (0, t)$.

Vi vill nu uttrycka detta med derivatorna av F vilket betyder att det blir partiella derivator av f . Från kedjeregeln får vi:

$$F'(t) = \left(h \cdot \frac{\partial}{\partial x} + k \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right) f \Big|_{\substack{x=(a+ht) \\ y=(b+kt)}} \quad (18)$$

Eftersom relationen mellan F' och $\left(h \cdot \frac{\partial}{\partial x} + k \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right) f$ är detsamma som relationen mellan F och f kan vi skriva ett enklare uttryck för flera deriveringar. Om vi deriverar flera gånger kan vi skriva uttrycket som:

$$F^{(j)}(t) = \left(h \cdot \frac{\partial}{\partial x} + k \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right)^j f \Big|_{\substack{x=(a+ht) \\ y=(b+kt)}} \quad (19)$$

Vi kan skriva detta eftersom h och k är konstanter och $\frac{\partial}{\partial x}$ samt $\frac{\partial}{\partial y}$ kommuterar ty Clairauts sats och $f \in C^{k+1}$.

Vi kan även göra det mer kortfattat om vi använder vektorer. Om $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^{k+1}$, $\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$, $\vec{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $\vec{h} = \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$ där $\vec{h}$ är så litet att $\vec{a} + \vec{h} \in D$. Då kan vi Taylorutveckla till:

$$f(\vec{a} + \vec{h}) = \sum_{j=0}^k \frac{(\vec{h} \cdot \nabla)^j f(\vec{a})}{j!} + \frac{(\vec{h} \cdot \nabla)^{(k+1)} f(\xi)}{(k+1)!} \quad (20)$$

3 Lokala extrempunkter

DEFINITION LOKALA EXTREMPUNKTER

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ har strängt lokalt maximum i $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ om det finns en omgivning Ω av $\vec{a}$ så att $f(\vec{x}) < f(\vec{a}) \forall \vec{x} \in \Omega \setminus \{\vec{a}\}$

SATS 2.6.11

Om $f(x)$ har lokalt extremvärde i en inre punkt $\vec{a}$ i definitionsområdet och f är partiellt

deriverbar i $\vec{a}$ så är $\nabla f(\vec{a}) = 0$

BEVIS

Betrakta linjer genom $\vec{a}$ parallella med koordinataxlarna. Funktionen $x_j \mapsto f(a_1, \dots, x_j, \dots, a_n)$ har lokalt extremvärde i $x_j = a_j \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} \forall j = 1, \dots, n \Rightarrow \nabla f(\vec{a}) = 0$

3.1 Klassificering av stationära punkter

DEFINITION

Om $\nabla f(\vec{a}) = 0$ kallas $\vec{a}$ för en stationär punkt.

Antag att $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ har en stationär punkt i $\vec{a} = (a, b)$. $\Rightarrow \nabla f(\vec{a}) = 0$ Detta ger Taylorutvecklingen $f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) + O(\|(h, k)\|^3)$ där $A = f''_{xx}(a, b)$, $B = f''_{xy}(a, b)$, $C = f''_{yy}(a, b)$ Tecknet på $f(a+h, b+k) - f(a, b)$ för små (h, k) avgör om $\vec{a}$ är en maximum/minimum punkt eller inte. Låt $Q(h, k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$. $Q(h, k) = O(\|(h, k)\|^2)$ och dominerar oftast $O(\|(h, k)\|^3)$ termen. $Q(\vec{x})$ kallas för kvadratisk form och kan generaliseras till $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Tecknet på Q avgör om den stationära punkten är en min- eller maximipunkt.

En kvadratisk form $Q(\vec{x})$ är:

- Positivt definit om $Q(\vec{x}) > 0 \forall \vec{x} \neq 0$ (Positivt semidefinit om $Q(\vec{x}) \geq 0$).
- Negativt definit om $Q(\vec{x}) < 0 \forall \vec{x} \neq 0$ (Negativt semidefinit om $Q(\vec{x}) \leq 0$).
- Indefinit om $Q(\vec{x})$ antar både positiva och negativa värden.

Om $Q(\vec{x})$ är:

- Positivt definit $\Rightarrow \vec{x}$ strängt lokalt minimum.
- Negativt definit $\Rightarrow \vec{x}$ strängt lokalt maximum.
- Indefinit $\Rightarrow \vec{x}$ är en sadelpunkt.

Om $Q(\vec{x})$ är semidefinit säger det oss inget då resttermen kan dominera. Ytterligare utredning behövs för att avgöra.

3.2 Matrisformulering

Låt $\vec{h} = \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$ och $M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$ Då blir $Q(\vec{h}) = \vec{h}^T M \vec{h} = (h, k) \begin{bmatrix} Ah + Bk \\ Bh + Ck \end{bmatrix} = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$

SPECIALFALLET 2 DIMENSIONER

Om:

- $AC - B^2 > 0$ och $A > 0 \Rightarrow Q(\vec{h})$ positivt definit.
- $AC - B^2 > 0$ och $A < 0 \Rightarrow Q(\vec{h})$ negativt definit.
- $AC - B^2 > 0 \Rightarrow Q(\vec{h})$ indefinit.

- $AC - B^2 = 0 \Rightarrow Q(\vec{h})$ semidefinit.

GENERELLT

Om M är en symmetrisk $n \times n$ matris, $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$, så är $Q(\vec{h}) = \vec{h}^T M \vec{h}$ på kvadratisk form, $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Genom att utföra ett variabelbyte $\vec{y} = T^T \vec{h} \Leftrightarrow \vec{h} = T \vec{y}$ detta ger $Q = \vec{h}^T M \vec{h} = \vec{y}^T D \vec{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$. Tecknet på Q kontrolleras av tecknet på alla λ_i . T inverterbar ger $\vec{h} = 0$ om $\vec{y} = 0$

SATS

$Q(\vec{h}) = \vec{h}^T M \vec{h}$ är:

- Positivt definit om alla egenvärden, λ , är positiva
- Negativt definit om alla egenvärden, λ , är negativa
- Indefinit om M har både positiva och negativa egenvärden.

4 Vektorvärda funktioner

Låt $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, då är $\vec{f}$ en vektorvärd funktion. Vektorvärda funktioner kan ses som en klass av funktioner som tar en vektor i $\mathbb{R}^n$ och genererar en annan vektor i $\mathbb{R}^p$ där $p, n > 1$.

Eftersom funktionen genererar en vektor med p koordinater kan $\vec{f}$ delas upp i p olika skalärvärda funktioner enligt:

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_p(\vec{x}) \end{bmatrix} \quad (21)$$

där $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är skalärvärda funktioner för $i = 1, \dots, p$.

Det gäller då att $\vec{f}$ är differentierbar om alla dess skalärvärda "del"-funktioner f_i är det.

4.1 Funktionalmatris

Vi har tidigare sett att skalärvärda funktioners egenskaper på många sätt kan kopplas samman med dess gradient. På samma sätt kan vi undersöka en vektorvärd funktions överensstämmelse. Om vi utvecklar f_i till dess linjära term i en omgivning $\vec{h}$ kring en punkt $\vec{a}$ och utesluter resttermen ger det oss:

$$f_i(\vec{a} + \vec{h}) \approx f_i(\vec{a}) + \nabla f_i(\vec{a}) \cdot \vec{h}. \quad (22)$$

På samma sätt kan $\vec{f}$ utvecklas i en omgivning $\vec{h}$ kring en punkt $\vec{a}$:

$$\vec{f}(\vec{a} + \vec{h}) \approx \vec{f}(\vec{a}) + \vec{f}'(\vec{a}) \vec{h}. \quad (23)$$

Där $\vec{f}'(\vec{a})$ är funktionalmatrisen innehållande alla $\vec{f}$:s partiella derivator. Vilken kan bildas utifrån uppdelningen 21 med gradienten av alla f_i enligt:

$$\vec{f}' = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ \nabla f_p(\vec{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Om funktionalmatrisen är en bijektion dvs den är inverterbar kan den bland annat användas för koordinatbyten.

4.2 Funktionaldeterminant

Tar vi determinanten av funktionalmatrisen dvs.

$$\det(\bar{f}'(\bar{x})) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{vmatrix}. \quad (25)$$

Ger det oss funktionaldeterminanten vilken ger oss mycket information om hur $\bar{f}$ beter sig kring $\bar{x}$.

Vi tar exemplet då $\det(\bar{f}'(\bar{a})) = -40x_1x_2$, för att det ska existera en omgivning kring $\bar{a}$ där f är en bijektion måste $x_1, x_2 \neq 0$. Determinanten är negativ för $x_1, x_2 > 0$ vilket ger att alla objekt som mappas av $\bar{f}$ spegelvänds i närheten av $\bar{f}$. Storleken på determinanten avgör med vilken faktor ett objekt som befinner sig i närheten av $\bar{a}$ skalas med om det mappas av f .

5 Linjärisering

Vi låter $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ vara en vektorvärd funktion som är differentierbar i $\bar{a}$ för alla f_i . Linjärseringen av f_i är då

$$f_i(\bar{a} + \bar{h}) = f_i(\bar{a}) + \nabla f_i(\bar{a}) \bullet \bar{h} + \|\bar{h}\| \rho_i(\bar{h}), \quad (26)$$

där $\rho_i(\bar{h}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ och $\rho_i(\bar{h}) \rightarrow 0$ då $\bar{h} \rightarrow \bar{0} \forall i = 1 \dots p$.

Då alla element i $\bar{f}$ är differentierbara i $\bar{a}$ så är även $\bar{f}$ differentierbar i $\bar{a}$. Linjärseringen av $\bar{f}$ skrivs

$$\bar{f}(\bar{a} + \bar{h}) = \bar{f}(\bar{a}) + \bar{f}'(\bar{a})\bar{h} + \|\bar{h}\| \bar{\rho}(\bar{h}), \quad (27)$$

där $\bar{\rho}(\bar{h}) \rightarrow \bar{0}$ då $\bar{h} \rightarrow \bar{0}$.

6 Kedjeregeln i allmänhet

Låt $\bar{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ och $\bar{f} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$, vara differentierbara och antag att $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ är inre punkt i $D(\bar{g})$ och att $\bar{g}(\bar{a})$ är inre punkt i $D(\bar{f})$.

$$\text{Låt } \bar{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p, \bar{g} = \begin{bmatrix} g_1(\bar{t}) \\ \vdots \\ g_p(\bar{t}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p, \bar{f} = \begin{bmatrix} f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

då ges komponent i av sammansättningen $\bar{f} \circ \bar{g}$ av

$$(\bar{f} \circ \bar{g})_i(\bar{t}) = f_i(\bar{g}(\bar{t})). \quad (28)$$

$f_i : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, enligt kedjeregeln steg 3, som presenterades och bevisades i lv.1, är f_i differentierbar. Element ij i funktionalmatrisen $(\bar{f} \circ \bar{g})'(\bar{t})$ är:

$$\frac{\partial}{\partial t_j}(\bar{f} \circ \bar{g})_i(\bar{t}) = \nabla f_i(\bar{g}(\bar{t})) \bullet \frac{\partial \bar{g}(\bar{t})}{\partial t_j} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_i}{\partial x_p} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial t_j} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Lägger vi ihop alla element ij i funktionalmatrisen $(\bar{f} \circ \bar{g})'(\bar{t})$ får vi

$$(\bar{f} \circ \bar{g})'(\bar{t}) = \bar{f}'(\bar{g}(\bar{t}))\bar{g}'(\bar{t}), \quad (30)$$

där $(\bar{f} \circ \bar{g})'(\bar{t})$ är en $m \times n$ matris, $\bar{f}'(\bar{g}(\bar{t}))$ är en $m \times p$ matris och $\bar{g}'(\bar{t})$ är en $p \times n$ matris. Ekvation (30) är den allmännaste formen av kedjeregeln, alla andra former av kedjeregeln är specialfall.

6.1 Specialfallet $m = n$

Låt $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ det vill säga ett n -dimensionellt vektorfält. Om $\bar{f}$ är differentierbar i $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ är $\bar{f}'(\bar{a})$ en $n \times n$ matris. Om $\bar{f}'(\bar{a})$ är en inverterbar matris $\Leftrightarrow \det(\bar{f}'(\bar{a})) \neq 0$. Gäller detta så är $\bar{f}$ inverterbar i en omgivning av $\bar{a}$.

7 Koordinatbyten

Ett sätt att betrakta funktioner är att vi har en punkt i $\mathbb{R}^n$ som vi sedan gör ett koordinatbyte med för att få en annan punkt i $\mathbb{R}^n$. Vi kan tänka att en sådan funktion motsvarar ett koordinatbyte.

7.1 Koordinatbyte i $\mathbb{R}^n$

Vi studerar ett koordinatbyte i $\mathbb{R}^n$ som beskrivs av $(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow (y_1, \dots, y_n)$. Vi uttrycker nya koordinater i gamla, vilket ger

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}. \quad (31)$$

Det fås att $(y_1, \dots, y_n) = \bar{y}$ och $(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)) = \bar{f}(\bar{x})$. Koordinatbytet kan nu betraktas som en funktion $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

För att ett koordinatbyte ska vara giltigt måste det vara inverterbart. Funktionen $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ som motsvarar koordinatbytet ska därmed vara en bijektiv avbildning. Den inversa funktionssatsen ger att det är möjligt i en omgivning av $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ om $\det(\bar{f}'(\bar{a})) \neq 0$.

Eftersom $\bar{y} = \bar{f}(\bar{x})$ fås funktionalmatrisen till

$$\bar{f}'(\bar{a}) = \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \quad (32)$$

vilket ger funktionaldeterminanten

$$\det(\bar{f}'(\bar{a})) = \frac{d(y_1, \dots, y_n)}{d(x_1, \dots, x_n)}. \quad (33)$$

Det inversa koordinatbytet till $\bar{y} = \bar{f}(\bar{x})$ blir

$$\bar{x} = \bar{f}^{-1}(\bar{y}). \quad (34)$$

7.2 Rätvinkliga koordinater till polära koordinater

Betrakta koordinatbytet $(x, y) \leftrightarrow (r, \theta)$ i $\mathbb{R}^2$. Koordinatbytet från rätvinkliga till polära koordinater beskrivs av

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \quad (35)$$

vilket ger funktionalmatrisen

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (36)$$

som ger funktionaldeterminanten

$$\frac{d(x, y)}{d(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{vmatrix} = r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta) = r. \quad (37)$$

Här kan vi se att koordinatbytet inte är giltigt i origo, ty $\frac{d(x, y)}{d(r, \theta)} = 0$ i origo.

7.3 Rätvinkliga koordinater till sfäriska koordinater

Betrakta koordinatbytet $(x, y, z) \leftrightarrow (r, \theta, \varphi)$ i $\mathbb{R}^3$. Koordinatbytet från rätvinkliga till sfäriska koordinater beskrivs av

$$\begin{cases} x = r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ y = r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z = r \cos(\theta) \end{cases} \quad (38)$$

vilket ger funktionaldeterminanten

$$\frac{d(x, y, z)}{d(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) & r \cos(\theta) \cos(\varphi) & -r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & r \cos(\theta) \sin(\varphi) & r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin(\theta). \quad (39)$$

Här kan vi se att koordinatbytet inte är giltigt om $\theta = 0$, $\theta = \pi$ eller $r = 0$, ty $\frac{d(x, y, z)}{d(r, \theta, \varphi)} = 0$ för dessa värden.

8 Implicita funktionssatsen

En nivåkurva där det finns mer än ett y -värde för något x -värde kan ej beskrivas som en funktionsgraf. Däremot kan kurvan beskrivas lokalt i en omgivning kring en punkt (a, b) på kurvan.

Omgivningen kring de flesta punkter kan göras så pass liten att det maximalt finns ett y -värde för varje x -värde. För särskilda punkter kommer omgivningen alltid innehålla fler än ett y -värde för varje x -värde. En sådan punkt har vertikal tangent samt horisontell normal och gradient.

$$\nabla F = \begin{bmatrix} F'_x \\ F'_y \end{bmatrix} \quad (40)$$

För att gradienten ska vara horisontell måste $F'_y = 0$. Ur detta följer första delen av sats 3.4.3.

Vidare kan derivatan i någon punkt där $y = y(x)$ formuleras som derivatan av $F(x, y(x)) = C$ som med hjälp av kedjeregeln kan skrivas

$$0 = \frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \iff \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}. \quad (41)$$

Ur detta följer andra delen av sats 3.4.3.

8.1 Sats 3.4.3

Låt $F(x, y)$ vara en C^1 -funktion och (a, b) en punkt på nivåkurvan $F(x, y) = C$. Om $F'_y(a, b) \neq 0$ så finns en öppen omgivning U av (a, b) sådan att restriktionen av nivåkurvan till U implicit definierar en C^1 -funktion $y = f(x)$. För derivatan av denna funktion gäller

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}. \quad (42)$$