

Tavelpresentation v1

Grupp 1B

January 2022

1 Inledande notation och begrepp

I flervariabelanalysen används följande notation för en funktion: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
 $n, m \geq 1$.

Vi säger då att f är en funktion av n variabler. Värdet på m avgör i vilken dimension funktionens värden hamnar i. Då $m = 1$ har vi en "skalärvärd funktion". Om $m > 1$ har vi en "vektorvärd funktion". Om $m = n$ kallas f ett n -dimensionellt vektorfält.

Man kan dela upp f i flera komponenter på följande sätt:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)). \quad (1)$$

Där $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ och $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^m$

2 Partiella derivator & differentierbarhet

2.1 En variabel

För $n = 1$ kan derivata formuleras på tre sätt, och kan sedan generaliseras för $n > 1$. I samtliga formuleringar utgår man från antagandet att $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är definierad i en omgivning till a som en inre punkt i f s definitionsmängd.

Formulering 1:

f är deriverbar i a om $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existerar. Detta gränsvärde kallas för derivatan i a och betecknas även $f'(a)$, $\frac{df}{dx}(a)$ eller $\frac{df}{dx}$ då $x = a$.

Formulering 2:

Låt $\rho(h)$ vara skillnaden mellan differenskvoten och derivatan, dvs

$$\rho(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \quad (2)$$

Deriverbarhet $\iff \lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0$. Om man sedan löser ut $f(a+h)$ fås uttrycket,

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\rho(h). \quad (3)$$

f är alltså deriverbar i $x = a$ om

$$\exists A \in \mathbb{R} \ \& \ \exists \rho(h) : f(a+h) = f(a) + Ah + h\rho(h) \quad (4)$$

och $\rho \rightarrow 0$ då $h \rightarrow 0$

Formulering 3:

Genom omskrivning av ekvation (4) med $x = a + h$ fås ekvationen

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + (x-a)\rho(x-a) \quad (5)$$

Om man bortser från sista termen vilken är liten då $x \approx a$ får man ekvationen får en tangentlinje i punkten $(a, f(a))$. Att $\lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0$ kan alltså tolkas grafiskt som att det existerar en unik tangentlinje till grafen i punkten. En tredje definition av derivatan i punkten då $x = a$ är alltså att det existerar en unik tangentlinje till grafen i punkten.

2.2 Flera variabler

För att finna ett begrepp som motsvarar derivata i en variabel kan man försöka generalisera ovanstående formuleringar till flera variabler.

Formulering 1 blir problematiskt i flera variabler då man kan närma sig punkten från oändligt många riktningar, till skillnad från i en variabel då man endast kan närma sig punkten längs x -axeln. Vidare beror derivatan ofta på vilken riktning man närmar sig. Begreppet riktningsderivata blir alltså en naturlig generalisering av formulering 1.

Särskilt viktiga riktningsderivator är de partiella derivatorna, alltså de riktningsderivator man får då man närmar sig punkten parallellt med koordinataxlarna. De partiella derivatorna för $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ i punkten (a, b) definieras då som

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} \end{aligned} \quad (6)$$

där $\frac{\partial f}{\partial x}$ är riktningsderivatan längs x -axeln och $\frac{\partial f}{\partial y}$ är riktningsderivatan längs y -axeln. Då detta är gränsvärden i en dimension kan de partiella derivatorna beräknas genom att använda de deriveringsregler från envariabelanalysen och derivera i endast en variabel och betrakta övriga variabler som konstanter.

2.3 Differentierbarhet

Vi generaliserar formulering 2 och 3 för flera variabler. Detta ger oss begreppet differentierbarhet.

Utifrån formulering 3 fås den grafiska definitionen :

f är differentierbar i en punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ om det finns ett unikt (hyper)plan som tangerar grafen i $\vec{a}$.

Utifrån formulering 2 får vi en annan definition för differentierbarhet i $\mathbb{R}^2$:

Antag att $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är definierad i en omgivning kring (a, b) . Då är f differentierbar i (a, b) om det finns reella konstanter A och B och en funktion $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sådana att:

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + Ah + Bk + \|(h, k)\| \rho(h, k) \quad (7)$$

Vi har även följande sats (2.2.1 s. 53) som säger:

$$f \text{ differentierbar i } (a, b) \Rightarrow f \text{ kontinuerlig i } (a, b) \quad (8)$$

För att kunna visa att och undersöka om en given funktion $f(x, y)$ är differentierbar i (a, b) kan man beräkna f'_x och f'_y och lösa ut ρ ur ekvation 7 vilket ger

$$\rho(h, k) = \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - f'_x(a, b)h - f'_y(a, b)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \quad (9)$$

Om detta $\rho(h, k) \rightarrow 0$ då $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ så är $f(x, y)$ differentierbar i punkten (a, b)

Det finns dock lättare sätt att visa differentierbarhet. Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ och D vara en öppen, sammanhängande mängd i $\mathbb{R}^n$. Vi skriver då $f \in C^1(D)$ om alla partiella derivator $f'_{x_1}, \dots, f'_{x_n}$ existerar i hela D och är kontinuerliga funktioner av n variabler i D . En sats uttrycker detta.

Sats 2.2.3:

$$f \in C^1(D) \implies f \text{ är differentierbar i hela } D. \quad (10)$$

Dock är det viktigt att uppmärksamma att omvändningen inte gäller i allmänhet.

3 Tangent(hyper)plan

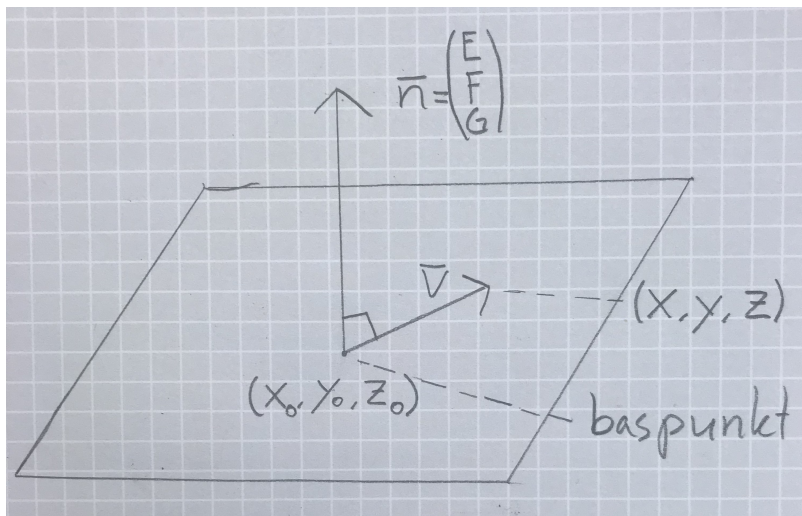


Figure 1: Bild på ett tangentplan till vektorn (x, y, z) med normalen $\vec{n}$.

Låt vektorn $\vec{v} = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}$ vara en godtycklig vektor i tangentplanet.

Låt normalvektorn till planet $\vec{n} = \begin{bmatrix} E \\ F \\ G \end{bmatrix}$.

Detta ger: $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$, vilket är ekvivalent med $E(x - x_0) + F(y - y_0) + G(z - z_0) = 0$

Låt nu $x_0 = a$, $y_0 = b$, $z_0 = f(a, b)$, $h = x - x_0$, $k = y - y_0$.

Då är

$$f(\vec{a} + \vec{h}) = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{h} + \|\vec{h}\| \rho(\vec{h}) \quad (11)$$

$$\iff$$

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| \rho(h, k) \quad (12)$$

där $a + h = x$, $b + k = y$ och $f(a, b) = z_0$. Funktionen $z = f(x, y)$ ger då grafen av f . Om vi skippar sista termen får vi tangentplanet:

$$z = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0) \implies A(x - x_0) + B(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

4 Linjär approximation

Om $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, differentierbar i (x, y) är linjäriseringen av f i (x, y) :

$$f(x + h, y + k) = f(x, y) + h \cdot f'_x(x, y) + k \cdot f'_y(x, y). \quad (13)$$

Vid en approximation av $f(x + h, y + k)$ gör $\rho(h, k)$ så pass liten skillnad att den kan försummas. Vilket då ger oss linjär approximation. För att differentierbarhet ska gälla krävs att approximationen är bra kring punkten (x, y) .

5 Kedjeregeln och variabelbyten i partiella differentialekvationer

Minns kedjeregeln i en variabel: $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Kedjeregeln beskriver derivering av en sammansatt funktion. Men hur ser sammansättning av funktioner ut i flera variabler?

Låt $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ och $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$. Då blir sammansättningen $f \circ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Vi kommer generalisera kedjeregeln i 4 steg varav tre tas upp i detta dokument:

Steg 1: $n \geq 1, p = 1, m = 1$

Steg 2: $n = 1, p \geq 1, m = 1$

Steg 3: $n \geq 1, p \geq 1, m = 1$

Steg 4: $n \geq 1, p \geq 1, m \geq 1$ (Visas nästa vecka)

OBS! Följande antagande gäller för alla steg: $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ och $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$. f och g är differentierbara och $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ så att $\vec{a}$ är en inre punkt i g 's definitionsmängd. $g(\vec{a})$ är en inre punkt i f 's definitionsmängd.

Steg 1: Under antagandet är $f \circ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differentierbar i $\vec{t} = \vec{a}$ och den partiella derivatan i t_j är:

$$\frac{\partial}{\partial t_j} f(g(\vec{t})) = f'(g(\vec{t})) \frac{\partial g}{\partial t_j}. \quad (14)$$

Beviset av detta följer från fallet i en variabel då $\frac{\partial}{\partial t_j}$ betyder $\frac{d}{dt_j}$ där de andra variablerna hålls konstanta.

Steg 2: Under antagandet blir kedjeregeln

$$\frac{d}{dt} f(\vec{g}(t)) = \nabla f(\vec{g}(t)) \frac{d\vec{g}}{dt}. \quad (15)$$

Alternativt skrivsätt, $u = u(\vec{x}) = u(x_1, \dots, x_p)$ och $\vec{x} = \vec{x}(t)$:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{dt} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{dt}. \quad (16)$$

Steg 3: $n \geq 1, p \geq 1$

Tag $\vec{g} : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^p$ och $f : \mathbb{R}^p \Rightarrow \mathbb{R}$. Då är $\frac{\partial}{\partial t_j} f(\vec{g}(\vec{t})) = \nabla f(\vec{g}(\vec{t})) \cdot \frac{\partial \vec{g}}{\partial t_j}$
 $\forall j = 1, \dots, n$

Alternativ skrivsätt är att låta:

$u = u(x) = u(x_1, \dots, x_p)$ och $\vec{x} = x(\vec{t}) = x(t_1, \dots, t_n)$.

Då är $\frac{\partial u}{\partial t_j} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial t_j}$.

Sedan följs steg 2 på samma sätt som steg 1 följer av envariabelanalys.

De andra $t_k, k \neq j$, där j och k är konstanter.

Observera att $f, g \in C^2 \Rightarrow f \circ g \in C^1$.

Variabelbyten i partiella differentialekvationer använder sig av kedjeregeln. T.ex. variabelbyte i planet av funktionen f . Antag att $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, differentierbar i (x, y) . $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, differentierbar i (u, v) där $u = u(x, y)$ och $v = v(x, y)$. Då kan vi göra variabelbytet $(x, y) \rightarrow (u, v)$. Då gäller $\tilde{f}(u, v) = \tilde{f}(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$

Se f som en funktion från planet istället för ett talpar.

6 Gradient och riktningsderivata

När vi deriverar en funktion i en variabel med hjälp av derivatans definition kan vi endast närma oss gränsvärdet längs x -axeln, vi angriper punkten från det positiva och negativa hållet. Medan i fallet då vi har minst två variabler kan vi angripa punkten från oändligt många riktningar. Det medför att vi först måste bestämma en riktning vi vill angripa punkten från innan vi kan bestämma derivatan. Dessa derivator beror ofta på vilken riktning som väljs och derivatan i en given riktning kallas för riktningsderivata.

För en normerad riktningsvektor $\hat{v} \in \mathbb{R}^n$ definieras riktningsderivatan av f i punkten $\vec{a}$ som

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(\vec{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + h\hat{v}) - f(\vec{a})}{h} \quad (17)$$

Om $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är differentierbar i $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ definierar vi gradienten i $\vec{a}$, $\nabla f(\vec{a}) =$

$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix}$. $\nabla f(\vec{a})$ är med andra ord en kolonnvektor med de partiella derivatorna för $x_1, x_2, \dots, x_n$ i punkten $\vec{a}$.

Enligt sats 2.4.6. gäller om $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är differentierbar i $\vec{a}$ och $\hat{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\hat{v}\| = 1$ att riktningsderivatan $\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(\vec{a})$ existerar och är

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \hat{v} \quad (18)$$

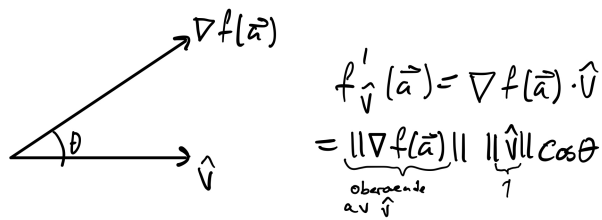
där $\nabla f(\vec{a})$ är gradienten av f i $\vec{a}$.

6.1 Geometrisk tolkning av gradient

Sats 2.4.7: Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vara differentierbar funktion i punkten $\vec{a}$. Då kommer gradienten $\nabla f(\vec{a})$ att peka i den riktning som f har maximal tillväxthastighet $\|\nabla f(\vec{a})\|$.

Detta kan bevisas geometriskt med hjälp av skalärprodukt.

Geometriskt bevis



Som störst då $\theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = 1 \Rightarrow f'_v = \|\nabla f(\vec{a})\|$ $\square$

Figure 2: Bild på geometriskt bevis för geometrisk tolkning av gradient

Man kan även bevisa det algebraiskt med hjälp av Cauchy-Schwartz sats, men det ingår ej i kursen och utelämnas därför.

6.2 Nivåkurvor

Nivåkurvor är ytterligare ett geometriskt tolkning av gradient.

Def: Låt $f : \mathbb{R}^{n+1} \Rightarrow \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$ där C är en konstant.

Ekvationen $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = C$ definierar vanligtvis en n -dimensionell hyperyta i $\mathbb{R}^{n+1}$

Det är viktigt att notera att det inte alltid rör sig om en yta. Ett exempel är $x^2 + y^2 + z^2 = -1$, som inte skapar en yta.

Rent metodiskt kan man tänka att man skall lösa ut en variabel, t.ex $z = z(x, y)$. I många fall är det dock svårt att lösa ut en variabel **explicit**. Då kan använda den **implicita** beskrivning som angavs i definitionen $f(\vec{x}) = c$.

Benämningar beroende på dimension

$n = 1$	Nivåkurva	i $\mathbb{R}^2$
$n = 2$	Nivåyta	i $\mathbb{R}^3$
$n = 3$	Nivåhyperyta	i $\mathbb{R}^{n+1}$

Antag att f differentierbar i punkten $\vec{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$ och $\hat{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$, med norm $\|\hat{v}\| = 1$ i någon riktning.

Om $\hat{v}$ är en tangenriktning till ytan $f(\vec{x}) = c$ i $\vec{a}$ blir riktningsderivatan $f'_{\hat{v}}(\vec{a}) = 0 \iff \nabla f(\vec{a}) \cdot \hat{v} = 0 \iff \nabla f(\vec{a}) \perp \hat{v}$,

dvs alla tangenriktningar är ortogonala mot $\nabla f(\vec{a})$.

Enligt sats 2.4.8 följer även att $\iff \nabla f(\vec{a})$ är normal till tangentplanet- eller linjen.

7 Derivator av högre ordning

Derivator av högre ordning kan skrivas på flera sätt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = f''_{x_k x_j} \quad (19)$$

Resten av texten kommer visa om det spelar roll i vilken ordning man deriverar olika variabler vid derivata av högre ordning.

Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ och $D \subseteq \mathbb{R}^n$, där D är en öppen mängd. Låt det även existera ett heltal $k \geq 0$.

Om alla f 's partiella derivator av grad $\leq k$ existerar och är kontinuerliga i hela D så gäller $f \in C^k(D)$.

$C^1(D)$ innehåller de funktioner som tidigare beräknats, alltså de med en kontinuerlig förstaderivata, och $C^0(D)$ innehåller alla kontinuerliga funktioner.

För $k \geq 2$ har vi:

Sats 2.5.9 (Clairouts sats):

Om $f \in C^k(D)$ spelar det ingen roll i vilken ordning vi utför partiell derivering upp till grad k .

Exempel är:

$$\begin{aligned}k = 2 : f''_{xy} &= f''_{yx} \\k = 3 : f'''_{xxy} &= f'''_{xyx} = f'''_{yxx}\end{aligned}$$

Det allmänna fallet för satsen kan härledas via induktion, först över antal variabler (n) och sedan (k) .