

Demonstration 1

MVE035/MVE600 - Flervariabelanalys

Hampus Renberg Nilsson, MSc.

Hampus.Renberg.Nilsson@chalmers.se

Våren 2022

Dagens genomgång: 2.1e, 2.2b, 2.8c, 2.9, extra.

Uppgift 2.1e

Beräkna de partiella förstaderivatorna för funktionerna e)

$$f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1)$$

Lösning

Variablerna är x och y .

Den partiella förstaderivatan i x -led finnes genom att derivera m.a.p. x och tänka på y som en konstant, dvs.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{x^2 + y^2}. \quad (2)$$

Den partiella förstaderivatan i y -led finnes genom att derivera m.a.p. y och tänka på x som en konstant, men av symmetriskäl kan vi direkt säga att den är

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (3)$$

Om ni inte hängde med på symmetriskälet, kan ni förstås derivera f m.a.p. y liksom vi gjorde för x och få samma svar.

Uppgift 2.2b

Beräkna $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, $k = 1, 2, 3$, för funktionerna ($\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$) b)

$$f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}. \quad (4)$$

Lösning

Variablerna är alltså x_1, x_2 och x_3 .

Vi skulle kunna derivera m.a.p. en variabel i taget för resp. k , men i detta fall kan vi m.h.a. symmetri göra en generell partiell derivering,

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2} \cdot 2x_k = \frac{x_k}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}. \quad (5)$$

Differentierbarhet

Definition: f är en funktion av n variabler med definitionsmängd D och $\mathbf{a}$ är en inre punkt i D . Vi säger att f är **differentierbar i punkten $\mathbf{a}$** om det finns konstanter $\{A_i\}_{i=1}^n$ och en funktion $\rho(\mathbf{h})$ sådana att

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{h} + |\mathbf{h}| \rho(\mathbf{h}) \quad (6)$$

och

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \rho(\mathbf{h}) = 0. \quad (7)$$

Om f är differentierbar i varje punkt $\mathbf{a} \in D$ säger vi att f är **differentierbar**.

Uppgift 2.8c

Visa genom direkt användning av definitionen att följande funktioner är differentierbara i angivna punkter: c)

$$f(x, y) = e^{x+2y} \quad \text{i} \quad (2, 2). \quad (8)$$

Lösning

De partiella derivatorna av f är

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2f. \quad (9)$$

Linjärisering kring (2,2) ger

$$\begin{aligned} f(2+h, 2+k) &= f(2, 2) + hf'_x(2, 2) + kf'_y(2, 2) + \sqrt{h^2 + k^2} \rho(h, k) \\ e^{2+h+4+2k} &= e^{2+4} + he^{2+4} + 2ke^{2+4} + \sqrt{h^2 + k^2} \rho(h, k) \\ e^{6+h+2k} &= e^6 + he^6 + 2ke^6 + \sqrt{h^2 + k^2} \rho(h, k) \\ \rho(h, k) &= e^6 \cdot \frac{e^{h+2k} - 1 - (h + 2k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \end{aligned} \quad (10)$$

Nu vill vi alltså visa att bråket går mot noll då $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.

Låt oss sätta $t = h + 2k$. Då får vi att

$$e^{h+2k} - 1 - (h + 2k) = e^t - 1 - t = \mathcal{O}(t^2) = \mathcal{O}((h + 2k)^2). \quad (11)$$

Vi har alltså att

$$\rho(h, k) = e^6 \cdot \frac{\mathcal{O}((h + 2k)^2)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \rightarrow 0 \quad \text{då} \quad (h, k) \rightarrow 0, \quad (12)$$

vilket skulle bevisas.

Uppgift 9

Effektutvecklingen P i ett motstånd med resistansen R ges av formeln

$$P = \frac{U^2}{R} \quad (13)$$

där U är spänningen över motståndet. Antag att $U = 220 \text{ V}$ och $R = 9 \Omega$. Uppskatta med hjälp av differentierbarhet hur effekten ändras om U ökas med 5 V och R ökas med 0.3Ω .

Lösning

Vi utnyttjar approximationen

$$\Delta P \approx \frac{\partial P}{\partial U} \Delta U + \frac{\partial P}{\partial R} \Delta R = \frac{2U}{R} \Delta U - \frac{U^2}{R^2} \Delta R. \quad (14)$$

Eftersom $\Delta U = 5 \text{ V}$ och $\Delta R = 0.3 \Omega$ får vi att

$$\Delta P \approx \frac{2 \cdot 220}{9} \cdot 5 - \frac{220^2}{9^2} \cdot 0.3 \approx 65 \text{ W}. \quad (15)$$

Uppgift extra

Betrakta funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ som ges av

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^4}{x^4 + y^{16}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases} \quad (16)$$

- (i) Motivera att f faktiskt är väldefinierad i hela $\mathbb{R}^2$.
- (ii) Visa att riktningsderivatan till f i varje riktning är noll i origo.
- (iii) Visa att f inte är kontinuerlig i origo.

Lösning (i)

Det enda som skulle kunna göra detta bråk odefinierat är noll i nämnaren. Detta uppstår endast då $(x, y) = (0, 0)$, eftersom ett reellt tal upphöjt med ett jämnt tal alltid är ≥ 0 , men just i det fallet är funktionen inte definierad av bråket.

Lösning (ii)

Nu räcker det inte att kolla partiella förstaderivatan i x - och y -led, ty då missar vi alla sneda riktningar.

För alla riktningar, förutom den längs y -axeln, gäller att $y = cx$ där c är en konstant. Vi kan alltså parametrisera dessa enligt $x = t, y = ct$ och beräkna derivatan i origo när vi närmar oss längs denna linje.

Avståndet från origo till en punkt (t, ct) på denna linje är

$$\sqrt{(t-0)^2 + (ct-0)^2} = \sqrt{t^2 + c^2 t^2} = |t| \sqrt{1 + c^2} \quad (17)$$

och derivatan i origo längs denna linje ges alltså av

$$\begin{aligned} f'_{y=cx} \Big|_{(0,0)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, ct) - f(0, 0)}{|t| \sqrt{1 + c^2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3 c^4 t^4}{t^4 + c^{16} t^{16}} - 0}{|t| \sqrt{1 + c^2}} \\ &= \pm \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{c^4 t^2}{1 + c^{16} t^{12}}}{\sqrt{1 + c^2}} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Derivatan längs y -axeln ges av gränsen

$$\begin{aligned} f'_y(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{0 t^4}{0 + t^{16}}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Lösning (iii)

För att f ska vara kontinuerlig i origo, måste $f \rightarrow f(0,0) = 0$ längs alla kurvor till origo.

För att visa att f inte är kontinuerlig i origo, räcker det alltså med att hitta en kurva till origo där $f \nrightarrow 0$.

Låt oss följa kurvan $y = \sqrt[4]{x}$. Då får vi

$$f(x, \sqrt[4]{x}) = \frac{x^3(\sqrt[4]{x})^4}{x^4 + (\sqrt[4]{x})^{16}} = \frac{x^4}{x^4 + x^4} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{då} \quad (x, y) \rightarrow (0, 0). \quad (20)$$