

Demonstration 2

MVE035/MVE600 - Flervariabelanalys

Hampus Renberg Nilsson, MSc.

`Hampus.Renberg.Nilsson@chalmers.se`

Våren 2022

Dagens genomgång: 2.34, extra, 2.62b, 2.67, 2.70.

Uppgift 2.34

Betrakta funktionen $f(x, y) = xy \sin x$ i punkten $(\pi/2, 1)$.

- a) I vilken riktning växer f snabbast? Hur stor är tillväxten i denna riktning?
- b) Beräkna riktningsderivatan av f i riktningen $(-3, 4)$.
- c) Bestäm tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i den punkt på ytan där $x = \pi/2$ och $y = 1$.

Lösning a)

En funktion växer snabbast i gradientens riktning.

Gradienten ∇f är en vektor av de partiella derivatorna, dvs.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad (1)$$

så låt oss beräkna de partiella derivatorna. För x -derivatan får vi använda produktregeln,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \sin x + xy \cos x, \quad (2)$$

medan för y -derivatan är det enklare,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \sin x, \quad (3)$$

eftersom funktionen bara är y gånger en konstant.

Gradienten är således

$$\nabla f = (y \sin x + xy \cos x, x \sin x). \quad (4)$$

Riktningen som f växer snabbast i är alltså

$$\nabla f(\pi/2, 1) = \left(1 \cdot \sin(\pi/2) + \frac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot \cos(\pi/2), \frac{\pi}{2} \sin(\pi/2) \right) = \left(1, \frac{\pi}{2} \right). \quad (5)$$

Tillväxten ges av $|\nabla f(\pi/2, 1)| = \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$.

Lösning b)

Riktningsderivatan i allmänhet i riktning $\vec{v}$ ges av

$$f'_{\vec{v}} = \nabla f \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}. \quad (6)$$

I vårt fall har vi alltså

$$f'_{\vec{v}} = \left(1, \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{(-3, 4)}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = \frac{-3 + 2\pi}{5}. \quad (7)$$

Lösning c)

Funktionsvärdet $z_0 = f(x_0, y_0)$ i punkten är $f(\pi/2, 1) = \frac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot \sin(\pi/2) = \frac{\pi}{2}$.

Tangentplanet ges av

$$\begin{aligned} z - z_0 &= f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \\ \implies z - \frac{\pi}{2} &= 1 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}(y - 1), \\ \implies z &= x + \frac{\pi}{2}y - \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Extra

Om $x = e^s \cos t$, $y = e^s \sin t$ och $f(x, y) = f(x(s, t), y(s, t))$ är en C^2 -funktion, visa att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = (x^2 + y^2) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right). \quad (9)$$

Lösning

Varning för rörig uppgift!

Några samband vi kommer att använda mycket är derivatorna av x, y m.a.p. s, t , så låt oss beräkna dessa nu,

$$\frac{\partial x}{\partial s} = e^s \cos t = x, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = e^s \sin t = y, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = -e^s \sin t = -y, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = e^s \cos t = x. \quad (10)$$

Låt oss nu beräkna första derivatan av f m.a.p. s . För att göra detta använder vi kedjeregeln och får

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (11)$$

För att sedan beräkna andraderivatan får vi först använda oss av produktregeln,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} &= \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial y} \\ &= x \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial y}, \end{aligned} \quad (12)$$

och sedan kedjeregeln på uttrycken

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial s} = x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \quad (13)$$

och

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial s} = x \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \quad (14)$$

Alltså har vi att

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} &= x \frac{\partial f}{\partial x} + x \left(x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \right) + y \frac{\partial f}{\partial y} + y \left(x \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \\ &= x \frac{\partial f}{\partial x} + x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + xy \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + xy \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Låt oss nu beräkna första derivatan av f m.a.p. t . För att göra detta använder vi, liksom tidigare, kedjeregeln och får

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (16)$$

För att sedan beräkna andraderivatans får vi först, liksom tidigare, använda oss av produktregeln,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} \right) = -\frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial y} \\ &= -x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial y}, \end{aligned} \quad (17)$$

och sedan kedjeregeln på uttrycken

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} = -y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \quad (18)$$

och

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial t} = -y \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \quad (19)$$

Alltså har vi att

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= -x \frac{\partial f}{\partial x} - y \left(-y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \right) - y \frac{\partial f}{\partial y} + x \left(-y \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \\ &= -x \frac{\partial f}{\partial x} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - xy \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} - xy \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Nu sätter vi samman dessa uttryck och får

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \cancel{x \frac{\partial f}{\partial x}}^0 + x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \cancel{xy \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}}^0 + \cancel{y \frac{\partial f}{\partial y}}^0 + \cancel{xy \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}}^0 + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ &\quad - \cancel{x \frac{\partial f}{\partial x}}^0 + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \cancel{xy \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}}^0 - \cancel{y \frac{\partial f}{\partial y}}^0 - \cancel{xy \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}}^0 + x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ &= x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ &= (x^2 + y^2) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

vilket skulle bevisas.

Uppgift 2.62b

Taylorutveckla funktionen

$$f(x, y) = \sqrt{1 + x + y} \quad (22)$$

kring $(1, 0)$ t.o.m. andragradstermer.

Lösning

Taylorformel till andra ordningen i två variabler ges av

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k + \frac{1}{2} (f''_{xx}(a, b)h^2 + 2f''_{xy}(a, b)hk + f''_{yy}(a, b)k^2). \quad (23)$$

Låt oss beräkna de partiella derivatorna,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{1+x+y}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{4(1+x+y)^{3/2}}. \quad (24)$$

I punkten $(1, 0)$ är dessa lika med

$$f'_x(1, 0) = f'_y(1, 0) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{resp.} \quad f''_{xx}(1, 0) = f''_{xy}(1, 0) = f''_{yy}(1, 0) = -\frac{1}{4 \cdot 2^{3/2}} = -\frac{1}{8\sqrt{2}}. \quad (25)$$

Taylorutvecklingen är alltså

$$f(1 + h, k) \approx \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(h + k) - \frac{1}{16\sqrt{2}}(h^2 + 2hk + k^2). \quad (26)$$

Uppgift 2.67

Bestäm alla lokala extrempunkter till

$$f(x, y) = x^3y^2 + 27xy + 27y. \quad (27)$$

Lösning

För alla stationära punkter gäller att gradienten är noll, dvs.

$$\nabla f = (3x^2y^2 + 27y, 2x^3y + 27x + 27) = \vec{0} \quad (28)$$

vilket ger oss ekvationerna

$$3x^2y^2 + 27y = 0, \quad (29a)$$

$$2x^3y + 27x + 27 = 0. \quad (29b)$$

Om $y = 0$ ger Ekvation (29b) att

$$27x + 27 = 0 \implies (x, y) = (-1, 0). \quad (30)$$

Om $y \neq 0$ kan vi dividera Ekvation (29a) med y , så får vi

$$3x^2y + 27 = 0 \implies y = -\frac{9}{x^2}. \quad (31)$$

Låt oss nu stoppa in detta y -värde i Ekvation (29b) så får vi

$$-2x^3 \frac{9}{x^2} + 27x + 27 = -18x + 27x + 27 = 9x + 27 = 0 \implies x = -3 \implies y = -1. \quad (32)$$

De enda två stationära punkterna är alltså $(-1, 0)$ och $(-3, -1)$.

Men en stationär punkt är inte nödvändigtvis en extrempunkt! För att avgöra om en punkt är en extrempunkt eller en sadelpunkt, kan vi studera den kvadratiske formen

$$Q(h, k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 \quad (33)$$

där

$$A = f''_{xx}(a, b), \quad B = f''_{xy}(a, b), \quad C = f''_{yy}(a, b). \quad (34)$$

Då finns det 3 fall som kan uppstå:

- $AC - B^2 = 0$: Q är semidefinit $\implies$ vidare analys behövs.
- $AC - B^2 < 0$: Q är indefinit $\implies$ sadelpunkt.
- $AC - B^2 > 0$: Q är definit $\implies$ Maximum om $A < 0$, minimum om $A > 0$.

För vår funktion har vi

$$f''_{xx} = 6xy^2, \quad f''_{xy} = 6x^2y + 27, \quad f''_{yy} = 2x^3. \quad (35)$$

I punkten $(-1, 0)$ får vi alltså

$$A = 0, \quad B = 27, \quad C = -2. \quad (36)$$

Då har vi alltså att $AC - B^2 < 0$ så Q är indefinit. Punkten är alltså en sadelpunkt.

I punkten $(-3, -1)$ får vi däremot

$$A = -18, \quad B = -54 + 27 = -27, \quad C = -54. \quad (37)$$

Nu har vi alltså att $AC - B^2 = 972 - 729 > 0$ och $A < 0$ så Q är negativt definit. Punkten är alltså ett lokalt maximum.

Uppgift 2.70

Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definieras genom

$$f(x, y, z) = (x + xy + yz)e^x. \quad (38)$$

Ange alla stationära punkter till f . Har f någon lokal extrempunkt?

Lösning

För alla stationära punkter gäller att gradienten är noll. Låt oss beräkna de partiella derivatorna,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (1 + y)e^x + (x + xy + yz)e^x = (1 + x + y + xy + yz)e^x, \quad (39a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (x + z)e^x, \quad (39b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = ye^x. \quad (39c)$$

Vi kan snabbt notera att Ekvation (39c) endast är noll då $y = 0$.

Vidare kan vi notera att Ekvation (39b) endast är noll då $z = -x$.

Sist kan vi notera att Ekvation (39a) endast är noll då

$$1 + x + y + xy + yz = 0 \quad \implies \quad 1 + x = 0 \quad \implies \quad x = -1. \quad (40)$$

Alltså finns det bara en stationär punkt, i $(-1, 0, 1)$.

Är det en extrempunkt eller sadelpunkt? Vi börjar med att finna andraderivatorna,

$$f''_{xx} = (1 + y)e^x + (1 + x + y + xy + yz)e^x = (2 + x + 2y + xy + yz)e^x, \quad (41a)$$

$$f''_{xy} = e^x + (x + z)e^x = (1 + x + z)e^x, \quad (41b)$$

$$f''_{xz} = ye^x, \quad (41c)$$

$$f''_{yy} = 0, \quad (41d)$$

$$f''_{yz} = e^x, \quad (41e)$$

$$f''_{zz} = 0. \quad (41f)$$

I den stationära punkten vi undersöker är de

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= e^{-1}, & f''_{xy} &= e^{-1}, & f''_{xz} &= 0, \\ f''_{yy} &= 0, & f''_{yz} &= e^{-1}, & f''_{zz} &= 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Låt oss nu studera den kvadratiske formen, som nu i 3 dimensioner ges av

$$Q(h, k, l) = f''_{xx}h^2 + 2f''_{xy}hk + 2f''_{xz}hl + f''_{yy}k^2 + 2f''_{yz}kl + f''_{zz}l^2. \quad (43)$$

I vår punkt evalueras detta till

$$Q(h, k, l) = e^{-1} (h^2 + 2hk + 2kl). \quad (44)$$

Vi ser att

$$Q(1, 0, 0) > 0 \quad (45)$$

medan exempelvis

$$Q(0, 1, -1) < 0. \quad (46)$$

Q antar alltså både positiva och negativa värden $\implies Q$ är indefinit $\implies$ punkten är en sadelpunkt (alltså *ej* en extrempunkt).