

Tavelpresentation Lv2

Grupp 2B

Edvin Ahlström, Linus Berggren, Nellie Karlsson,
Robin Oscarsson, Johan Svanstedt & Greta Vedberg

28 Januari 2022

1 Clairouts sats

Om $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2$, i en omgivning (a,b) så är $f''_{xy}(a,b) = f''_{yx}(a,b)$. Denna sats är otroligt viktig eftersom det tillåter oss att lösa t.ex. andra ordningens PDE såsom ex 27 s.89:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

Med följande variabelsubstitutioner:

$$\begin{cases} u = x + ct \\ v = x - ct \end{cases} \quad (2)$$

Hoppar man över några steg kommer man tillslut fram till:

$$c^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) = 0 \quad (3)$$

Vilket pga. satsen blir

$$-4c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0 \quad (4)$$

Med detta i bakhuvudet kan vi börja kolla på Taylorutvecklingar. Clairouts sats kommer vara viktigt för flervariabelfallet.

2 Taylors formel

2.1 Envariabelfallet

Påminnelse för envariabelfallet:

Låt D vara omgivning kring $x = a$, $f \in C^{k+1}(D)$ och h så litet att $[a - |h|, a + |h|] \subseteq D$ så gäller:

$$f(a+h) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(a)}{j!} h^j + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} h^{k+1} (= \mathcal{O}(h^{k+1})) \quad (5)$$

För något ξ mellan a och $a + h$. Så, Taylorapproximationen av grad 1 är linjäriseringen:

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \mathcal{O}(h^2) \quad (6)$$

Och approximationen av grad 2 ger:

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2} + \mathcal{O}(h^3) \quad (7)$$

Där om punkten a är stationär, dvs. $f'(a) = 0$, ger detta att:

$$\begin{cases} f''(a) > 0 \Rightarrow x = a \text{ lokalt minimum för } f. \\ f''(a) < 0 \Rightarrow x = a \text{ lokalt maximum för } f. \\ f''(a) = 0 \Rightarrow \text{kräver längre Taylorutveckling.} \end{cases} \quad (8)$$

Med detta i åtanke kan vi kolla på flervariabelfallet och slutligen extrempunkter för detta fall.

2.2 Flervariabelfallet

För Taylorutveckling i flera variabler börjar vi med en funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, där vi vill utveckla $f(x, y)$ kring (a, b) . Vi fixerar h_1 och h_2 och bildar en envariabelfunktion(9).

$$F(t) = f(a + th_1, b + th_2) \quad (9)$$

Taylorutvecklingen kring $t = 0$, antag $t > 0$, lyder då:

$$F(t) = \sum_{j=0}^k \frac{F^{(j)}(0)}{j!} t^j + \frac{F^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} t^{k+1}, \xi \in (0, t) \quad (10)$$

Vi uttrycker sedan derivatorna av F uttryckt i partiella derivator av f , kedjeregeln ger att

$$F'(t) = f'_x(a + th_1, b + th_2) \frac{d}{dt}(a + th_1) + f'_y(a + th_1, b + th_2) \frac{d}{dt}(b + th_2) \quad (11)$$

Vilket kan skrivas

$$(h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y}) f \quad (12)$$

där $x = a + th_1, y = b + th_2$. Deriverar vi fler gånger får vi att derivatan av ordning j är:

$$F^{(j)}(t) = (h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y})^j f \quad (13)$$

Vilket sedan kan utvecklas med hjälp av binomialsatsen:

$$F^j(t) = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} h_1^i h_2^{j-i} \frac{\partial^j f}{\partial^i x \partial^{j-i} y} \quad (14)$$

där $x = a + th_1, y = b + th_2$.

Mer kortfattat kan vi låta $\bar{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\bar{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ och $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$

Detta ger att

$$h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} = \bar{h} \cdot \nabla \quad (15)$$

Vilket ger att

$$f(\bar{a} + \bar{h}) = F(1) = \sum_{j=0}^k \frac{(\bar{h} \cdot \nabla)^j}{j!} f(\bar{a}) + \frac{(\bar{h} \cdot \nabla)^{k+1} f(\xi)}{(k+1)!} \quad (16)$$

För något ξ på sträckan mellan $\bar{a}$ och $\bar{a} + \bar{h}$.

3 Lokala extrempunkter

En undersökning som kan göras av en funktion lokalt är att finna så kallade lokala maximi- och minimipunkter.

Definition. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ har lokalt maximum i $\bar{a}$ om det existerar en omgivning Ω av $\bar{a}$ så att

$$f(\bar{x}) \leq f(\bar{a}) \quad (17)$$

(för lok. minimum, $f(\bar{x}) \geq f(\bar{a})$).

Sats. Om $\bar{a}$ är ett lokalt minimum/maximum och f differentierbar i $\bar{a}$, så är:

$$\nabla f(\bar{a}) = 0. \quad (18)$$

$\bar{a}$ kallas kritisk eller stationär punkt till f .

En kritisk punkt kan antingen vara ett lokalt minimum/maximum men även en så kallad sadelpunkt. För att klassificera typen kan Taylorpolynom användas. Studerar man specialfallet då f är en funktion av två variabler samt att $f(a,b)$ är en stationär punkt fås:

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = \frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) + \mathcal{O}(h,k) \quad (19)$$

där $A = f''_{xx}$, $B = f''_{xy}$ och $C = f''_{yy}$. Vidare innebär en stationär punkt att första ordningens termer försvinner. Nära (a,b) dominerar andra ordningens termer och därmed kan resttermen försummas.

$$Q(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \quad (20)$$

Genom att bestämma tecknet för Q kan den kritiska punktens karaktär bestämmas.

Definition. En kvadratisk form, $Q(\bar{x})$, är:

- *Positivt definit* om $Q(\bar{x}) > 0, \forall \bar{x} \neq \bar{0} \Rightarrow$ minimipunkt
- *Negativt definit* om $Q(\bar{x}) < 0, \forall \bar{x} \neq \bar{0} \Rightarrow$ maximipunkt
- *Indefinit* om $Q(\bar{x})$ antar både positiva och negativa värden $\Rightarrow$ sadelpunkt

(Obs! *semidefinit* om $\geq$ eller $\leq$) .

Q kan även beskrivas på vektorform där:

$$\bar{h} = \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}, \mu = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\text{och } Q(\bar{h}) = \bar{h}^T \mu \bar{h}. \quad (22)$$

Med hjälp av matrisen μ , som även är Q 's så kallade *hessian*, så kan dess tillhörande egenvärden beräknas. Genom att beräkna egenvärdena kan Q 's tecken, och vidare de stationära punkternas karaktär, bestämmas enligt följande sats:

Sats. Låt μ vara en kvadratisk matris med tillhörande egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Då är

- *Positivt definit* om alla dess egenvärden är större än 0
- *Positivt definit* om alla dess egenvärden är mindre än 0
- *Indefinit* om μ har både egenvärden större och mindre än 0 .

4 Vektorvärda funktioner

4.1 Vektorvärda funktioner och funktionalmatriser

Definition. Ifall en funktion $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ där $n, m \in \mathbb{N}$ och $m > 1$, kallas den för en vektorvärd funktion.

Definition. En vektorvärd funktion $\bar{f}$ definieras som differentierbar i $\bar{a}$ om och endast om alla komponenter f_j , där $j = 1, \dots, m$, är det.

Linjärisering av en vektorvärd funktion innebär av linjärisering av alla komponenter j i $\bar{f}$. Vi får

$$f_j(\bar{a} + \bar{h}) = f_j(\bar{a}) + \nabla f_j(\bar{a}) \cdot \bar{h} + ||\bar{h}|| \cdot \rho_j(\bar{h}) \quad (23)$$

där $\rho_j(\bar{h}) \rightarrow 0$ då $\bar{h} \rightarrow 0$

Uttrycker vi $\bar{f}_i$ i form av kolonnvektorer ger det

$$\bar{f}(\bar{a}) = \begin{bmatrix} f_1(\bar{a}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{a}) \end{bmatrix}, \bar{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \bar{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}, \bar{\rho}(\bar{h}) = \begin{bmatrix} \rho_1(\bar{h}) \\ \vdots \\ \rho_m(\bar{h}) \end{bmatrix} \quad (24)$$

En funktionalmatris består av en vektorvärd funktions partiella derivator och ser ut enligt följande

$$\bar{f}'(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Vid specialfallet $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, där $\bar{f}$ är differentierbar i $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, bildar $\bar{f}$ s partiella derivator en $n \times n$ funktionalmatris. Om determinanten då är nollskild blir funktionalmatrisen inverterbar. Det visar sig då att själva funktionen $\bar{f}$ också är inverterbar i en omgivning kring $\bar{a}$.

4.2 Kedjeregeln för sammansatta vektorvärda funktioner

Definition. Låt funktionerna $\bar{g} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ och $\bar{f} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ vara sammansatta samt differentierbara. Antag således att $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ är en inre punkt i $D(\bar{g})$ och $\bar{g}(\bar{a})$ en inre punkt i $D(\bar{f})$. Låt

$$\bar{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p, \bar{g}(\bar{t}) = \begin{bmatrix} g_1(\bar{t}) \\ \vdots \\ g_p(\bar{t}) \end{bmatrix}, \bar{f}(\bar{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}) \end{bmatrix} \quad (26)$$

Då ges j komponenten av sammansättningen $\bar{f} \circ \bar{g}$ av $(\bar{f} \circ \bar{g})_j(\bar{t}) = f_j(\bar{g}(\bar{t}))$. Varje enskild komponent $f_j : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ och kedjeregeln tredje steg kan därav appliceras och ger

$$\frac{\partial}{\partial t_i} (\bar{f} \circ \bar{g})_j(\bar{t}) = \nabla f_j(\bar{g}(\bar{t})) \cdot \frac{\partial \bar{g}(\bar{t})}{\partial t_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_j}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_j}{\partial x_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial t_i} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Dessa bildar rad j och kolonn i av funktionalmatrisen för den sammansatta funktionen. Upprepas detta för alla j fås den allmänna formeln för kedjeregeln (steg 4) enligt

$$(\bar{f} \circ \bar{g})'(\bar{t}) = \bar{f}'(\bar{g}(\bar{t})) \cdot \bar{g}'(\bar{t}) \quad (28)$$

5 Inversa funktionssatsen och koordinatsystem

5.1 Inversa funktionssatsen

Definition. Låt $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\bar{f} \in C^1(D)$, $\bar{a} \in D$ så att $\det(\bar{f}'(\bar{a})) \neq 0$. Då finns det öppna omgivning U kring $\bar{a}$ och V kring $\bar{f}(\bar{a})$ så att

$$\begin{aligned} \bar{f} : U &\rightarrow V \text{ är bijektiv} \\ \bar{f}^{-1} : V &\rightarrow U \text{ är en funktion av klassen } C^1 \end{aligned} \quad (29)$$

5.2 Koordinatbyten

En viktig applicering av inversa funktionssatsen är koordinatbyten. Ett koordinatbyte, eller variabelbyte med andra ord, kan ses som ett specialfall av en vektorvärd funktion $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Alltså har det formen

$$(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow (y_1, \dots, y_n). \quad (30)$$

De nya variablerna uttrycks i de gamla genom

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_n = y_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

För att koordinatsystemet skall vara användbart måste det kunna inverteras. Inversa funktionssatsen ger att det är möjligt att invertera i en omgivning av $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ om $\det(\bar{f}'(\bar{a})) \neq 0$. Detta kan, då $\bar{y} = \bar{f}(\bar{x})$, skrivas som funktionalmatrisen

$$\bar{f}'^{-1} = \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}.$$

Koordinatbytet från $\bar{x}$ till $\bar{y}$ ges då av

$$\bar{x} = \bar{f}^{-1}(\bar{y}) \quad (31)$$

6 Implicit givna funktioner

Enhetscirkeln kan beskrivas som nivåkurvan till funktionen $F(x, y) = x^2 + y^2$.

$$F(x, y) = x^2 + y^2 = 1 \quad (32)$$

Vi finner att det inte går att beskriva kurvan med någon funktionsgraf eftersom varje $x \neq 1, -1$ motsvarar två värden för y . Övriga delar av kurvan går att beskriva med funktionsgraferna

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad (33)$$

för övre halvan respektive

$$y = -\sqrt{1 - x^2} \quad (34)$$

för nedre halvan. Om vi inför $g_1(x) = x$, $g_2(x) = y(x)$ kan vi i dessa punkter beräkna tangentens riktning med hjälp av kedjeregeln.

$$\begin{aligned} 1 &= F(x, y) = F(x, y(x)) = F(g_1(x), g_2(x)) \\ \implies 0 &= \frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} g'_1(x) + \frac{\partial F}{\partial y} g'_2(x) \\ \implies \frac{dy}{dx} &= -\frac{F'_x}{F'_y} \end{aligned} \quad (35)$$

Det är här tydligt att F'_y måste vara skilt från 0. Detta formuleras i nästa sats.

Sats. Implicita Funktionssatsen

Låt $F(x, y)$ vara en C^1 - funktion och (a, b) en punkt på nivåkurvan $F(x, y) = C$.

Om

$$F'_y(a, b) \neq 0 \quad (36)$$

så finns en öppen omgivning U av (a, b) sådan att restriktionen av nivåkurvan till U implicit definierar en C^1 -funktion $y = f(x)$. För derivatan av denna funktion gäller

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}. \quad (37)$$

Satsen går även att generalisera för funktioner av flera variabler.