

# Tavelpresentation - Grupp 1E

Gabriel Melin, Hussein Rezai, Ludvig Bergstrand,  
Ludwig Bågenfelt och Philip Gifting

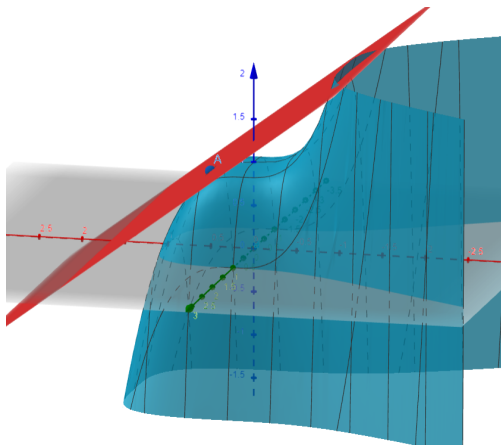
Februari 1, 2022

## 1 Differentierbarhet

**Definition:** Funktionen  $f$  är deriverbar i  $a$  om  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$  existerar ( $f'(a)$ ). Om vi sätter  $\rho(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) \Rightarrow f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\rho(h)$  där  $\lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) \rightarrow 0$  då det finns inget krav på  $\rho(0)$ . Detta innebär att funktionen  $f$  är deriverbar om  $\exists$  en unik linje (tangent) i punkten  $a$ .

**Differentierbarhet:** Låt  $f$  vara definierad i mängden  $I$  med  $n$  variabler och  $\vec{a}$  vara en inre punkt i definitionsmängden. Funktionen  $f$  är differentierbar om konstanter  $A_1, \dots, A_n$  och en funktion  $\rho(\vec{h})$  finns sådana att  $f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) = A_1 h_1, \dots, A_n h_n + |\vec{h}|\rho(\vec{h})$  och  $\lim_{\vec{h} \rightarrow 0} \rho(\vec{h}) = 0$ .

**Anmärkning:** Den unika linjen i definitionen för deriverbarhet motsvarar ett plan till en funktion med två variabler d.v.s en funktion  $f$  med två variabler är differentierbar i en punkt  $\vec{a}$  om det existerar ett unikt plan (tangentplan) till punkten  $\vec{a}$ . För funktioner med tre variabler motsvarar detta ett klot o.s.v. De konstanta koefficienter i definitionen ( $A_1, \dots, A_n$ ) är partiella derivatorna med avseende på funktionens variabler.



Figur 1: Figuren visar grafen till en funktion med två variabler. Denna funktion är differentierbar i punkten  $A$  då det finns ett unikt plan till funktionen i denna punkt.

## 2 Riktningsderivator

**Definition:** Om det finns en normerad riktningsvektor  $\hat{v} \in \mathbb{R}^n$ , där  $\|\hat{v}\| = 1$ , så definierar vi riktningsderivatan för en funktion  $f$  i riktningen  $\hat{v}$  i punkten  $\mathbf{a}$  enligt:

$$f'_{\hat{v}}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\hat{v}) - f(\mathbf{a})}{h}.$$

**Tolkning:** Ett sätt att tolka riktningsderivatan är att se det som ett mått på förändringen hos en funktion i en valbar riktning, givet att man kan beskriva riktningen med en riktningsvektor.

**Sats 1:** Om  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  antas vara en differentierbar funktion i punkten  $\mathbf{a}$  och  $\hat{v} \in \mathbb{R}^n$ , som är en normerad vektor med  $\|\hat{v}\| = 1$ , så existerar det en riktningsderivata med utseendet:

$$f'_{\hat{v}}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \hat{v}.$$

**Exempeluppgift 2.31:** Beräkna riktningsderivatan i riktningen  $(1, 2, 2)$  av funkttionen  $f(x, y, z) = xyz$  i en godtyckligt punkt  $\mathbf{a} = (x, y, z)$ .

**Lösningförslag:** Beteckna vektorn  $v = (1, 2, 2)$ . Normera därefter vektorn genom att dela ursprungsvektorn med längden av vektorn  $v$ . Riktningsvektorn blir då  $\hat{v} = \frac{(1, 2, 2)}{3}$ . Gradienten av  $f(\mathbf{a})$  är i sin tur ekvivalent med  $(yz, xz, xy)$ . I samband med sats 1 så fås riktningsderivatan slutligen av  $f'_{\hat{v}}(\mathbf{a}) = \frac{(yz, 2xz, 2xy)}{3}$ .

### 3 Partiell derivata

När undersöker en reellvärd funktion är derivatan väsentlig. I samband med att vi introducerar flera variabler måste vi utvidga begreppet derivata och använda oss av den så kallade partiella derivatan. Partiella derivatan beskriver en funktions utseende parallellt med koordinataxlarna. I praktiken beräknas partiella derivator genom att man deriverar funktionen med avseende på en variabel samtidigt som man betraktar övriga variabler som konstanter. Samma procedur upprepar man tills alla variabler har blivit deriverad med avseende just på den variabeln.

**Definition:** Antag att  $n \geq 1$  och  $\mathbf{a} \in D_f$ , där  $\mathbf{a}$  är en inre punkt i definitionsmängden  $D_f$  för  $f$ . Antag därefter att  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , och  $f = f(x_1, \dots, x_n)$ . Om gränsvärdet:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{a})}{h} = f'_{x_j}$$

existerar så är  $f$  partiellt deriverbar just med avseende på  $x_j$  i punkten  $\mathbf{a}$ . Vidare, om funktionen är partiellt deriverbar för alla  $1 \leq i \leq n$  säger vi att  $f$  är partiellt deriverbar i punkten  $\mathbf{a}$ .

**Exempel:** Tar vi det tvådimensionella fallet när  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  och när  $f$  är definierad och kontinuerlig i hela  $\mathbb{R}^2$  innebär det att de partiella derivatorna med avseende på variablerna definieras som, eftersom vi befinner oss i  $\mathbb{R}^2$ , enligt:

$$f'_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

$$f'_y = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}.$$

### 4 Gradient

Tidigare har vi sett att de partiella derivatorna beskriver en funktions utseende parallellt med koordinataxlarna. När man tittar på satsen för kedjeregeln och differentierbarhet antyder detta på att de partiella derivatorna tillsammans beskriver uppförandet av funktionen i andra riktningar, varför begreppet gradient införs.

**Definition:** För differentierbara funktioner  $f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ , definierar vi gradienten av  $f$  i punkten  $\mathbf{a}$  som vektorn  $\text{grad } f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) = (f'_{x_1}, \dots, f'_{x_n})$ .

Gradienten av  $f(\bar{x})$  är en vektor i  $\mathbb{R}^n$  bestående av de partiella derivatorna för funktionen  $f$ . Funktionen  $\bar{x} \rightarrow \text{grad } f(\bar{x})$  är ett  $n$ -dimensionellt vektorfält vilket gör att man geometriskt kan tolka gradienten i lågdimensionella fall.

**Exempel:** Beräkna gradienten av  $f$  om  $f(x, y) = xy^2 + x^2y$ . Notera att  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  och antag  $f$  är differentierbar.

**Lösning:** Vi börjar med att beräkna de partiella derivatorna  $f'_x$  och  $f'_y$  då vi befinner oss i  $\mathbb{R}^2$  för att sedan kunna sammanställa detta enligt definitionen för gradienten som en vektor av de partiella derivatorna.

$$\begin{cases} f'_x &= y^2 + 2xy, \\ f'_y &= 2xy + x^2. \end{cases}$$

Därefter sammanställer vi dessa och får att då få att  $\nabla f(x, y) = (y^2 + 2xy, 2xy + x^2)$ .

## 5 Kedjeregeln i flera variabler

I en variabel är kedjeregeln för  $\frac{d}{dt}f(g(t)) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$  där  $f$  och  $g$  är funktioner från  $\mathbb{R}$  till  $\mathbb{R}$ . Vi måste generalisera uttrycket för att kedjeregeln ska fungera i flera variabler. Vi tar två funktioner  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  och  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Antag att både  $f$  och  $g$  är differentierbara funktioner och att det finns ett  $\bar{t} \in \mathbb{R}^n$  där  $\bar{t}$  är en inre punkt till  $D(g)$  och  $g(\bar{t})$  är en inre punkt till  $D(f)$ . Generaliseringen görs i 4 steg för olika värden på  $n, p$  och  $m$ .

$$\begin{aligned} \text{Steg 1 : } n &\geq 1 & p &= 1 & m &= 1 \\ \text{Steg 2 : } n &= 1 & p &\geq 1 & m &= 1 \\ \text{Steg 3 : } n &\geq 1 & p &\geq 1 & m &= 1 \\ \text{Steg 4 : } n &\geq 1 & p &\geq 1 & m &\geq 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Om vi tittar på steg 3 kommer vi få att den sammansatta funktionen kommer vara  $f \circ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . I detta steg får vi att kedjeregeln ger:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(g(\bar{t})) = \nabla f(g(\bar{t})) \cdot \frac{\partial g}{\partial t_j} \quad j = 1, \dots, n, \tag{2}$$

vilket alternativt kan skrivas som

$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial t_j}, \tag{3}$$

där  $u = u(\bar{x})$  och  $\bar{x} = \bar{x}(\bar{t})$ .

## 6 Tillämpning av partiella differentialekvationer

I följande exempel visas hur kedjeregeln används för att lösa den partiella differentialekvationen.

**Exempel: (Övningsuppgift 2.25)**

Partiella differentialekvationen (PDE) är:

$$y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = xyf \tag{4}$$

$$\text{Nya variabler : } \begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = e^{-x^2/2} \end{cases} \tag{5}$$

a) Skriv PDE:n i  $(u, v)$

b) Lös PDE:n med bivillkoret  $f(0, y) = y^2$

**Lösning:** Vi börjar med att skriva  $f(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ . Här kan vi då tillämpa kedjeregeln för att

få fram  $\frac{\partial f}{\partial x}$  samt  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . Vi börjar med att partialderivera funktionen  $f$  med avseende på  $x$ . Enligt kedjeregeln får vi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Vi kan utveckla vidare detta uttryck genom att ersätta  $\frac{\partial u}{\partial x}$  och  $\frac{\partial v}{\partial x}$  med de nya variabler (ekvation 5) då uttrycken betyder derivatan av  $u$  och  $v$  med avseende på  $x$ . Derivatan av  $u$  och  $v$  med avseende på  $x$  är  $2x$  respektive  $-xe^{-x^2/2}$ . Vid insättning fås:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \frac{\partial f}{\partial u} - xe^{-x^2/2} \frac{\partial f}{\partial v}.$$

På samma sätt går vi tillväga för derivatan av  $f$  med avseende på  $y$ . Skillnaden här är att man ersätter  $\frac{\partial u}{\partial y}$  och  $\frac{\partial v}{\partial y}$  med derivatan av  $u$  och  $v$  med avseende på  $y$ , vilket är  $2y$  respektive  $0$ . Med  $0$  menas att derivatan av  $v$  med avseende på  $y$  blir noll då variabeln  $y$  inte förekommer i  $v$ . Därmed får vi uttrycket:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \frac{\partial f}{\partial u}.$$

Vi kan nu uttrycka dessa derivator enligt följande:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \frac{\partial f}{\partial u} - xe^{-x^2/2} \frac{\partial f}{\partial v}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \frac{\partial f}{\partial u}. \quad (7)$$

Nu kan vi sätta in uttrycken 6 och 7 i den partiella differentialekvationen (ekvation 4), vilket ger oss:

$$\begin{aligned} y \left( 2x \frac{\partial f}{\partial u} - xe^{-x^2/2} \frac{\partial f}{\partial v} \right) - 2xy \frac{\partial f}{\partial u} &= xyf \Leftrightarrow 2xy \frac{\partial f}{\partial u} - xye^{-x^2/2} \frac{\partial f}{\partial v} - 2xy \frac{\partial f}{\partial u} = xyf \\ \Leftrightarrow -xye^{-x^2/2} \frac{\partial f}{\partial v} &= xyf \Leftrightarrow -e^{-x^2/2} \frac{\partial f}{\partial v} = f \Leftrightarrow -v \frac{\partial f}{\partial v} = f. \end{aligned}$$

Vi har alltså  $f(u, v) = -v \frac{\partial f}{\partial v}$ . Om vi nu betraktar  $u$  som en konstant, så kan vi skriva om uttrycket till en separabel differentialekvation som går att lösa genom att integrera båda led:

$$-v \frac{df}{dv} = f \Rightarrow \frac{1}{f} \frac{df}{dv} = -\frac{1}{v} \Leftrightarrow \int \frac{1}{f} df = - \int \frac{1}{v} dv \Rightarrow \ln(f) = -\ln(v) + C.$$

Eftersom vi betraktar  $u$  som en konstant, så kan vi sätta integrationskonstanten  $C$  beroende på  $u$  så att vi får  $\ln(f) = -\ln(v) + C(u)$ . För att få  $f$  ensamt i ett av leden så höjer vi med  $e$  på båda leden, alltså:

$$\ln(f) = -\ln(v) + C(u) \Rightarrow f = \frac{1}{v} e^{C(u)}.$$

Nu kan vi döpa  $e^{C(u)}$  till  $G(u)$ . Alltså har vi att  $f(u, v) = \frac{1}{v} G(u)$ .

Nu inför vi bivillkoret och sätter tillbaka  $x$  och  $y$  in i funktionen, alltså byter vi ut variablerna  $u$  och  $v$  till det som står i ekvation 5:  $f(x, y) = e^{x^2/2} \cdot G(x^2 + y^2)$ . Nu sätter vi in villkoret och får:

$$f(0, y) = y^2 \Rightarrow e^{0^2/2} \cdot G(0 + y^2) = y^2 \Leftrightarrow G(y^2) = y^2.$$

Vi ser att  $G(t) = t$ , alltså  $G(x^2 + y^2) = x^2 + y^2$ . Därmed har vi slutligen att

$$f(x, y) = e^{x^2/2} (x^2 + y^2).$$