

Tavelpresentation 3C

Viktor Arvidsson, Nils Backlund, Marcus Blixt,
Gustav Giebat, Carl Klang, David Widén

2022-02-04

1 Dubbelintegraler

En flervariabelfunktion har till skillnad från en envariabelfunktion inte endast en derivata, vilket implicerar att det inte finns en uppenbar generalisering av primitiv funktion i fler variabler heller. Av detta följer även att analysens fundamentalsats i envariabel:

$$F' = f \Rightarrow \int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a), \quad (1)$$

inte har en generell generalisering i fler variabler.

Det är däremot möjligt att beräkna värdet av bestämda integraler i fler variabler, men andra metoder än i envariabel fallet måste användas. För två variabler kallas de dubbelintegraler och för en funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ där f är kontinuerlig och den kompakta mängden $D \subseteq \mathbb{R}^2$ blir dubbelintegralen:

$$I = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy. \quad (2)$$

Informellt kan ekvation 2 tolkas som volymen med tecken mellan grafen $z = f(x, y)$ och området D i xy -planet. Fyra faktiska tekniker för att lösa dubbelintegraler är inspektion, Fubinis sats, variabelbyten och nivåkurvor.

2 Inspektion

Syftet med inspektion är att hitta genvägar för att lösa en dubbelintegral genom att utnyttja att en dubbelintegral beskriver volym med tecken, symmetrier och linearitet. Utifrån detta finns tre viktiga iakttagelser att göra:

1. Integralen är en linjär kombination:

$$\iint_D (\alpha f + \beta g) dx dy = \alpha \iint_D f dx dy + \beta \iint_D g dx dy. \quad (3)$$

2. Dela upp området $D = D_1 \cup D_2$ och $D_1 \cap D_2$ är en nollmängd.

$$\iint_D f dx dy = \iint_{D_1} f dx dy + \iint_{D_2} f dx dy \quad (4)$$

3. Medelvärde av f på D (ekvation 5), där $\mu(D)$ (ekvation 6) är arean av D .

$$\frac{1}{\mu(D)} \iint_D f dx dy \quad (5)$$

$$\mu(D) = \iint_D 1 dx dy \quad (6)$$

3 Fubinis sats

3.1 Axelparallell rektangel

Fubinis sats kan användas för att beräkna dubbelintegralen över ett axelparallellt område $\Delta = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} = [a, b] \times [c, d]$, där $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Detta bildar en rektangel i xy -planet där sidorna är parallella med x -respektive y -axeln och dess area $\mu(\Delta) = (b - a)(d - c)$.

Fubinis sats säger då att för den kontinuerliga funktionen $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ kan dubbelintegralen skrivas om till två enkelintegraler på varandra enligt ekvation 7.

$$\iint_{\Delta} f dx dy = \int_c^d \int_a^b f dx dy = \int_a^b \int_c^d f dy dx \quad (7)$$

Byte av inbördes ordning av integralerna resulterar i samma svar, men kan beräkningstekniskt bli olika. Viktigt att tänka på är att para ihop rätt intervall till rätt variabel som ska integreras.

3.2 Reguljära områden

Ofta stöter man på områden som ej är axelparallella rektanglar. För att kunna beräkna integraler över dessa områden utvidgas Fubinis sats till att gälla även för reguljära områden. Till att börja med är det bra att definiera vad ett reguljärt område är. Definition är som följer:

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara kompakt. D sägs vara reguljärt i x-led om D kan delas upp i ändligt många delområden $D_1, \dots, D_m$. Där D_i har formen $D_i = \{(x, y) | a_i \leq x \leq b_i, \alpha_i(x) \leq y \leq \beta_i(x)\}$. Där $\alpha_i, \beta_i \in C^1$ och $\alpha_i(x) \leq \beta_i(x)$, $\forall x \in [a_i, b_i]$.

En analog definition följer för ett reguljärt område i y-led. En axelparallel rektangel är ett enkelt exempel på ett reguljärt område där α och β är konstanta. Nu kan Fubinis sats utvidgas till reguljära områden genom följande sats:

Låt $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$, $\alpha, \beta \in C^1$ och $f(x, y) : D \rightarrow \mathbb{R}$ kontinuerlig. Då gäller

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy dx. \quad (8)$$

Det går även att byta plats på x och y i satsen för ett reguljärt område i y-led. Resultatet kommer att bli identiskt oavsett om man integrerar med avseende på x eller y först, men beräkningstekniskt kan skillnaden bli stor. Vidare går det att definiera en nollmängd på följande sätt:

En mängd $N \subset \mathbb{R}^2$ kallas nollmängd om vi för varje $\epsilon > 0$ kan täcka N med ändligt många axelparallella rektanglar med total area $\leq \epsilon$. En mängd $D \subset \mathbb{R}^2$ kallas kvadrerbar om dess rand är en nollmängd.

Dessutom finns det ett lemma som säger att om φ kontinuerlig är grafen $y = \varphi(x)$, $a \leq x \leq b$ en nollmängd.

Som följd av definitionen av en kvadrerbar mängd och lemmat framgår det att reguljära områden är kvadrerbara.

4 Variabelbyten

Vid beräkning av dubbelintegraler kan variabelbyten vara en användbar metod. Ett variabelbyte innebär att man uttrycker de nuvarande variablerna i termer av nya variabler. Detta kan till exempel vara att man byter från cartesiska till polära koordinater. För att beskriva om ett variabelbyte är giltigt samt på vilken form den nya integralen skrivs finns följande sats:

Låt

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

vara en bijektiv C^1 -avbildning av ett område E i uv -planet till D i xy -planet. Antag att E och D är öppna, begränsade och kvadrerbara, samt att Jacobi-

determinanten $J(u, v) = \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \neq 0$. Då är:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(u, v) |J(u, v)| du dv \quad (9)$$

En intuitiv tolkning av detta samband är att determinanten av en avbildningsmatris beskriver en areaskalning, det vill säga när vi byter från en integral över D i xy -planet och E i uv -planet skalas arean om enligt Jacobideterminanten.

Som nämnt i satsen krävs det att variabelbytet är en bijektiv avbildning av området, men den behöver inte nödvändigtvis vara det i hela $\mathbb{R}^2$. Från att avbildningen är bijektiv, vilket är ekvivalent med att Jacobideterminanten $\neq 0$ och därmed är inverterbar, följer följande samband:

$$J(u, v) = \frac{d(x, y)}{d(u, v)} = \frac{1}{\frac{d(u, v)}{d(x, y)}} = \frac{1}{J(x, y)} \quad (10)$$

Detta innebär att det även går bra att uttrycka u och v i termer av x och y samt beräkna denna avbildnings Jacobideterminant $J(x, y)$ för att ta fram $J(u, v)$. Detta är dock ofta krångligare då man får Jacobideterminanten uttryckt i (x, y) och behöver översätta det till (u, v) .

5 Integration mha nivåkurvor

En dubbelintegral kan beräknas med hjälp av nivåkurvor om den har en integrand på den speciella formen:

$$\iint_D h(g(x, y)) dx dy \quad (11)$$

Där $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h \in C^0$ & $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g \in C^1$

och $D \subset \mathbb{R}^2$ kompakt & kvadrerbar

Antag även att $a \leq g(x, y) \leq b \forall x \in D$

Låt då $A(u) = \mu(\{(x, y) \in D : g(x, y) \leq u\})$

Då gäller det att:

$$\iint_D h(g(x, y)) dx dy = \int_a^b h(u) A'(u) du \quad (12)$$

Detta kan dock endast användas då integranden har den speciella formen och då vi kan beräkna $A(u)$ och $A'(u)$ explicit vilket inte alltid är möjligt.

Idén är att höjden $(g(x, y))$ är konstant ovanför $g(x, y) = u$ och $A'(u)du$ representerar en infinitesimal area vilket gör att $h(u)A'(u)du$ representerar volymen över nivåkurvan $g(x, y) = u$. $\int_a^b h(u)A'(u)du$ representerar då summan av alla volymer över nivåkurvorna från $g(x, y) = a$ till $g(x, y) = b$.

6 Generaliserade integraler

En dubbelintegral $\iint_D f(x, y) du dv$ är generaliserad om den uppfyller minst ett av de följande kraven:

(i) D är ett begränsat område men f obegränsad på D .

(ii) D är obegränsat

Till följd av att dubbelintegraler kan uppfylla fler än ett av kraven kan de på så sätt vara generaliserade på flera sätt samtidigt.

Generaliserade integraler hanteras genom att skapa en följd av områden $D_n \subseteq D_{n+1}$ så att $D \rightarrow \infty$ när $n \rightarrow \infty$. Om en integral är generaliserad genom (i) skapas D_n genom att skära eller ta bort mindre och mindre delar av D kring den punkten en viss punkt a där $f(\vec{x}) \rightarrow \pm\infty$ när $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$. Där $\vec{x}$ är en uppsättning av x-värden i vektorform och $\vec{a}$ är punkten a 's koordinater. Om den däremot är generaliserad genom (ii) tar man med större och större begränsade delar av D tills vi slutligen fått med det oändliga.

Ett viktigt specialfall är när f växlar tecken eftersom gränsvärdet kan då komma att bero på valet av uppdelning av området, D_n . För att kunna fortsätta studera detta fallet måste vi anta att $f(x, y) \geq 0$. Genom att sätta $f(x, y) \geq 0$ så kommer inte gränsvärdet $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) du dv$ bero på valet av D_n . I praktiken kan de "vanligateknikerna" appliceras på funktionen ifall detta är uppfyllt. Vid dessa beräkningar är det viktigt att tänka på att I kan bli oändlig och att integralen därmed är divergent.

Även om en funktion f växlar tecken går den att angripa ändå. Detta görs genom att dela upp f i en positiv och en negativ del. Den positiva delen ges av:

$$f^+(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{om } f(x, y) \geq 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \quad (13)$$

Medans den negativa delen ges av:

$$f^-(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{om } f(x, y) \geq 0 \\ -f(x, y) & \text{annars} \end{cases} \quad (14)$$

Med hjälp av dessa ekvationer går det att se att båda är icke-negativa, $f^+ \geq 0, f^- \geq 0$ vilket i ger oss följande uttryck för funktionen f uttryckt i de två delarna:

$$f = f^+ - f^- \quad (15)$$

Här kan man integrera f^+ och f^- var för sig. Problem uppstår om båda delarna divergerar eftersom hela uttrycket kommer göra det vilket gör det svårt att dra några slutsatser kring funktionen.

7 Teori för dubbelintegraler

7.1 Definition partition

En ändlig följd $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ kallas partition av intervallet $[a, b]$. Den får n delintervall $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Givet axelparallell rektangel $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ och partitionerna $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ och $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$ får vi av Δ i $m \cdot n$ delrektanglar $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ där $i = 0, 1, \dots, n-1$ och $j = 0, 1, \dots, m-1$.

7.2 Definition trappfunktion

Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ och $\Phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Φ kallas trappfunktion om det finns en partition så att Φ har konstant värde c_{ij} på $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ (kan ta $[x_{n-1}, x_n]$ respektive $[y_{m-1}, y_m]$ på övre respektive högra kanten)

7.3 Definition dubbelintegral trappfunktioner

Om $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ och $\Phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ och Φ är en trappfunktion kan dubbelintegralen av Φ över Δ definieras som

$$\iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij} (x_{i+1} - x_i) (y_{j+1} - y_j) \quad (16)$$

7.4 Definition dubbelintegral

Om $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ och $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ där f är en begränsad och kontinuerlig funktion. f är då integrerbar över Δ om det finns, för varje $\epsilon > 0$ trappfunktionerna Φ_ϵ och Ψ_ϵ existerar där Φ_ϵ och Ψ_ϵ är trappfunktioner. Om

funktionerna uppfyller

$$\begin{cases} (i) & \Phi_\epsilon(x, y) \leq f(x, y) \leq \Psi_\epsilon(x, y) \\ (ii) & \iint_\Delta \Psi_\epsilon(x, y) dx dy - \iint_\Delta \Phi_\epsilon(x, y) dx dy < \epsilon \end{cases} \quad (17)$$

definieras dubbelintegralen för f över Δ som

$$\iint_\Delta f(x, y) dx dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_\Delta \Phi_\epsilon(x, y) dx dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_\Delta \Psi_\epsilon(x, y) dx dy. \quad (18)$$

Det vill säga att f är integrerbar om den kan tryckas gotyckligt väl mellan trappfunktioner, och integralen är gränsvärdet av trappfunktionerna.

7.5 Huvudsats

Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ och $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ där f är en kontinuerlig funktion. Då gäller

$$\begin{cases} (i) & f \text{ är integrerbar över } \Delta \\ (ii) & \text{Både } \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \text{ och } \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy \text{ existerar} \\ (iii) & \iint_\Delta f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy. \end{cases} \quad (19)$$

Bevis förklaras ej här.