

Sammanfattning av föreläsningar LV. 3

MVE035, Grupp 3D

Jonathan Axelsson, Andreas Munck, Emanuel Alm,
Joel Janson, Oscar Larsson

February 2022

1 Dubbelintegraler: att integrera funktioner av två variabler

I en variabel gick det att se integralen av en funktion $f(x) = y$ som arean med tecken mellan grafen och x-axeln. I två variabler kan vi istället likna integralen av en funktionsyta $f(x, y)$ med volymen den bildar (med tecken) mot xy-planet.

För att integrera en funktion $f(x, y)$ kan vi först observera den i xz-planet och i yz-planet på intervallen $[a, b]$ respektive $[c, d]$. Vidare kan vi iaktta delintervallet $[x, x+dx]$ av funktionen i xz-planet. Det går följaktligen att se detta intervall av hela funktionsytan i rummet som endast en kurva som går parallellt med yz-planet. Med denna insikt går det att integrera kurvan som en envariabel funktion över intervallet $[c, d]$ för att få tvärsnittsarean av volymen vi söker.

$$Areal(x) = \int_c^d f(x, y) dy \quad (1)$$

Därefter observerar vi arean i yz-planet med bredden dx i xz-planet, som vi kan integrera över intervallet $[a, b]$ för att få volymen.

$$Volymen = \int_a^b dV = \int_a^b Areal(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \quad (2)$$

1.1 Trappfunktioner

För att en funktion skall gå att integreras i två tvåvariabler krävs det likt i envariabel att det går att approximera den ovan- och underifrån med trapp-

funktioner.

För att illustrera trappfunktionen i tvåvariabler kan vi observera en axelparallell rektangel i xy-planet som vi kan kalla $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$

Genom att dela in (ändligt många gånger) Δ i mindre axelparallella rektanglar Δ_{ij} som har höjden $y_{j+1} - y_j$ och bredden $x_{i+1} - x_i$ kan vi beskriva volymen en trappfunktion $\Phi(x, y)$ bildar mot xy-planet. Indelningen är gjord sådan att $\Phi(x, y)$ har det konstanta värdet c_{ij} i Δ_{ij} . Då c_{ij} kan ses som höjden och $(x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j)$ som basarean av rätblocket Δ_{ij} och $\Phi(x, y)$ bildar kan vi få den totala volymen genom att summera alla Δ_{ij} i Δ och multiplicera med höjden.

$$\sum_{ij} c_{ij} \cdot (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j) \quad (3)$$

Detta är volymen av $\Phi(x, y)$ över Δ som vi vet kan skrivas som:

$$\iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy. \quad (4)$$

Vi säger att en funktion f är integrerbar om vi kan få två trappfunktioner Φ och Ψ , som uppfyller $\Phi \leq f \leq \Psi$, godtyckligt nära varandra, genom att göra indelningen tillräckligt fin.

1.2 Inspektion för att lösa dubbelintegraler

En inledande teknik för att lösa dubbelintegraler är inspektion. Att inspektera en dubbelintegral är ofta ett bra första steg för att lösa en dubbelintegral då det i praktiken kan göra uträkningar betydligt lättare. Det är i huvudsak tre saker som kan utnyttjas vid inspektion:

1. Utnyttja att dubbelintegral beskriver volym med tecken
2. Utnyttja symmetri
3. Utnyttja linearitet

Vidare i praktiken kan följande iakttagelser göras:

- Integralen är en linjär operation och i $\mathbb{R}$ kan lineariteten uttryckas enligt ekvation 5.

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx \quad (5)$$

Där α och β betraktas som konstanter. Motsvarande i $\mathbb{R}^2$ kan lineariteten uttryckas enligt ekvation 6.

$$\iint_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy + \beta \iint_D g(x, y) dx dy \quad (6)$$

- Nästa iakttagelse är att det ibland kan underlätta att dela upp integrationsområdet i olika delområden. Om $D = D_1 \cup D_2$ och $D_1 \cap D_2$ är en nollmängd så kan dubbelintegralen delas upp enligt ekvation 7.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy \quad (7)$$

- Sista iakttagelsen är att medelvärdet av f på intervallet $a \leq x \leq b$ i $\mathbb{R}$ kan uttryckas enligt ekvation 8.

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (8)$$

Motsvarande i $\mathbb{R}^2$ kan medelvärdet av f på området D uttryckas enligt ekvation 9.

$$\frac{1}{\mu(D)} \iint_D f(x, y) dx dy \quad (9)$$

Där $\mu(D)$ betecknar arean av D .

2 Upprepad integration: Fubinis sats

Vid beräkning av dubbelintegraler är itererande integration ofta en metod som används. En sats som beskriver detta är Fubinis sats. Denna har delats upp i två delar där den ena berör axelparallella rektanglar och den andra reguljära områden.

2.1 Fubinis sats för axelparallella rektanglar

En axelparallell rektangel definieras på följande sätt:

Definition 1. Låt $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ där $a \leq b, c \leq d$. Mängden $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} = [a, b] \times [c, d]$ kallas en axelparallell rektangel i planet.

Fubinis sats för integration över axelparallella rektanglar säger då följande:

Sats 1. Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ vara en axelparallell rektangel och $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$. Då gäller att

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \quad (10)$$

Alltså kan dubbelintegralen skrivas som en itererande integral där man först integrerar med avseende på den ena variabeln och sedan den andra. Vilken variabel som först integreras påverkar inte resultatet men kan ha betydelse för svårigheten av beräkningarna som krävs.

2.2 Fubinis sats för reguljära områden

Ett reguljärt område definieras på följande sätt:

Definition 2. Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en kompakt mängd. D sägs vara ett reguljärt område i x-led om D kan delas upp i ändligt många delområden $D_1, \dots, D_m$ där D_i har formen $D_i = \{(x, y) : a_i \leq x \leq b_i, \alpha_i(x) \leq y \leq \beta_i(x)\}$ där $\alpha_i(x), \beta_i(x) \in C^1$ och $\alpha_i \leq \beta_i \forall x \in [a, b]$. Reguljärt område i y-led definieras analogt. Om ett område är reguljärt både i y-led och x-led kallas det reguljärt.

Fubinis sats för reguljära områden säger då följande:

Sats 2. Låt $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$, $\alpha(x), \beta(x) \in C^1$ och $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Då gäller att

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad (11)$$

3 Variabelbyten

I envariabelfallet utgörs ett variabelbyte av en monoton funktion g som avbildar ett intervall J på ett intervall I . Om $x = g(t)$. Detta kan skrivas som

$$\int_I f(x) dx = \int_J f(g(t)) |g'(t)| dt \quad (12)$$

Ett variabelbyte för dubbelintegraler genereras av en bijektiv avbildning i planet från ett område E i uv-planet till ett annat område D i xy-planet. En sådan avbildning kan skrivas $(x = g(u, v), y = h(u, v))$; $g, h \in C^1$

Om man delar upp D i små delar D_k motsvaras dessa av E_k som är en uppdelning av E . Låt då (x_k, y_k) vara en punkt i E_k . Funktionaldeterminanten av u och v betecknas $J(u, v)$. Eftersom att funktionaldeterminanten avbildar E på D genom variabelbytet erhålls det ungefärliga areaförändringen motsvarande $|J(u, v)|$. Detta medför att arean $\mu(D_k)$ ungefär motsvaras av $|J(u_k, v_k)| \mu(E_k)$. Därmed gäller att

$$\sum_k f(x_k, y_k) \mu(D_k) \approx \sum_k f(g(u_k, v_k), h(u_k, v_k)) |J(u_k, v_k)| \mu(E_k) \quad (13)$$

Både vänster och höger led är en Riemannsumma och när indelningen görs tillräckligt liten leder det till likhet mellan leden. Då gäller alltså

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| du dv \quad (14)$$

Detta sammanfattas i en sats.

Sats 3. Låt $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ vara en bijektiv C^1 -avbildning av ett öppet begränsat kvadrerbart område E i uv -planet på ett motsvarande område D i xy -planet, sådan att $J(u, v) \neq 0$ i E . Då är

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_E f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| \, du \, dv \quad (15)$$

om funktionerna under integraltecknet är integrerbara över respektive område.

[1]

4 Integration med hjälp av nivåkurvor

Dubbelintegraler kan evalueras med hjälp av nivå kurvor. Metoden beskrivs av följande sats.

Sats 4. Låt $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \in C^1$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \in C^0$ och $D \subset \mathbb{R}^2$ vara en kompakt och kvadrerbar mängd. Antag att $a \leq g(x, y) \leq b \, \forall (x, y) \in D$.

Låt $A(u) = \mu(\{(x, y) \in D : g(x, y) \leq u\})$.

Då gäller att $\iint_D h(g(x, y)) \, dx \, dy = \int_a^b h(u) A'(u) \, du$.

Följande viktiga observationer kan också göras av satsen:

- Satsen kräver att integranden i fråga är på en speciell form.
- Satsen kräver att $A(u)$ kan beräknas explicit, i syfte att kunna beräkna $A'(u)$.
- Satsen kan liknas vid Fubinis sats, men här skärs istället längs nivåkurvor.

5 Generaliserade integraler

En dubbelintegral $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$ är en generaliserad integral om något av följande scenarion uppstår.

- D är ett begränsat område, men $f(x, y)$ är obegränsad på D .
- D är ett obegränsat område.

En observation att göra är att en dubbelintegraler kan vara generaliserade på båda sätten samtidigt.

För att hantera generaliserade dubbelintegraler kan vi ordna en följd av delområden $D_n \subseteq D_{n+1}$ så att $D_n \rightarrow D$ då $n \rightarrow \infty$.

- I det första scenariot kan D_n fås genom att skära bort mindre och mindre delar av D kring de kritiska punkterna där $|f| \rightarrow \infty$
- I det andra scenariot kan D fås genom att ta med större och större begränsade delområden av det obegränsade området D .

Då $f(x, y) \geq 0$ beror gränsvärdet $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_D f(x, y) dx dy$ inte på formen av D_n . Observera att gränsvärdet I kan divergera.

Observera att om f växlar tecken i D så kan gränsvärdet bero på valet av D_n . Detta hanteras genom att dela upp integranden $f(x, y)$ i en positiv del och en negativ del:

$$f(x, y) = f^+(x, y) - f^-(x, y),$$

där

$$f^+(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{då } f(x, y) \geq 0 \\ 0 & \text{då } f(x, y) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x, y) = \begin{cases} -f(x, y) & \text{då } f(x, y) \leq 0 \\ 0 & \text{då } f(x, y) > 0 \end{cases}.$$

Vi kan sedan integrera varje del för sig så att

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f^+(x, y) dx dy - \iint_D f^-(x, y) dx dy.$$

Referenser

- [1] Arne Persson and Lars-Christer Böiers. *Analys i flera variabler*. Studentlitteratur, Lund, 3., [omarb.] uppl. edition, 2005.