

Sammanfattning läsvecka 2

Alice Lindqvist, Thor Anton Aasvold, Noa Bengtsson, Nils Ledin,
Jacob Olsson, Sofia Cellini

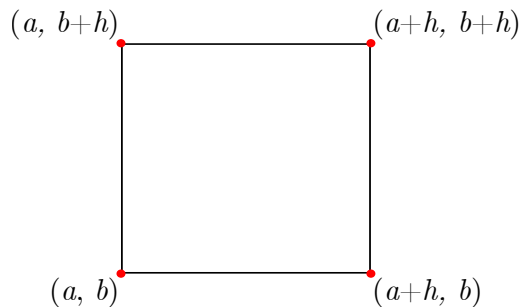
Januari 2022

1 Clairouts sats

Om $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ och $f \in \mathcal{C}^k$. För $k, n \geq 2$ så spelar ordningen som man utför partiell derivering inte någon roll, upp till grad k .

1.1 Bevis

För fallet då $k, n = 2$. Betrakta följande figur. Antag att h är så litet att $f \in \mathcal{C}^2$ på kvadraten.



Figur 1: Grafisk beskrivning av deriveringsprocessen.

Bilda F, G så att

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x, b+h) - f(x, b) \\ G(y) &= f(a+h, y) - f(a, y) \end{aligned}$$

Ekvationerna ovan ger sambandet:

$$\begin{aligned} F(a+h) - F(a) &= \\ f(a+h, b+h) - f(a+h, b) - f(a, b+h) + f(a, b) \\ &= G(b+h) - G(b) \end{aligned} \tag{1}$$

Lagranges medelvärdessats på F & G ger:

$$F(a+h) - F(a) = h \cdot F'(\xi), \quad a < \xi < a+h \tag{2}$$

$$G(b+h) - G(b) = h \cdot G'(\eta), \quad b < \eta < b+h \tag{3}$$

Från ekvation (1) följer det att ekvation (2) = ekvation (3), dvs

$$\begin{aligned} F'(\xi) &= G'(\eta) \iff \\ f'_x(\xi, b+h) - f'_x(\xi, b) &= f'_y(a+h, \eta) - f'_y(a, \eta) \end{aligned}$$

Genom att använda Lagranges medelvärdessats en gång till fås:

$$\begin{aligned} f'_x(\xi, b+h) - f'_x(\xi, b) &= h \cdot f''_{xy}(\xi, \zeta), & b < \zeta < b+h \\ f'_y(a+h, \eta) - f'_y(a, \eta) &= h \cdot f''_{yx}(\theta, \eta), & a < \theta < a+h \end{aligned}$$

Vilket ger på samma sätt som innan att

$$f''_{xy}(\xi, \zeta) = f''_{yx}(\theta, \eta)$$

Vi låter $h \rightarrow 0$. Antagandet $f \in \mathcal{C}^2$ ger att f''_{xy} & f''_{yx} är kontinuerliga. Vilket ger följande:

$$\xi \rightarrow a, \quad \zeta \rightarrow b, \quad \theta \rightarrow a, \quad \eta \rightarrow b$$

Vilket i sin tur ger att

$$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b) \tag{4}$$

Med hjälp av induktion bevisas satsen för $k, n \geq 2$. □

2 Variabelbyte i andra ordningens PDE

Exempeluppgift 27, sidan 84.

Lös endimensionella vågekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \tag{5}$$

där $c \in \mathbb{R}$ och $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

Lösning:

Ansätt variablerna $u = x + ct$, $v = x - ct$.

Första derivator:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}, \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = c \frac{\partial f}{\partial u} - c \frac{\partial f}{\partial v}. \end{aligned}$$

Då kan vi skriva detta som operatörer:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= c \frac{\partial}{\partial u} - c \frac{\partial}{\partial v}. \end{aligned}$$

Vi skriver om PDE:n,

$$\text{Ekvation (5)} \iff 0 = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} f - c^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} f.$$

Om man utvecklar ovanstående och använder Clairouts sats får man uttrycket:

$$-4c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0 \iff \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0.$$

Integration med avseende på u ger

$$\frac{\partial f}{\partial v} = g(v)$$

där $g \in C^1$ och kan tolkas som en "integrationskonstant" som beror på v , ty g derivaterat med avseende på u ger 0.

Integration med avseende på v ger

$$f(u, v) = G(v) + H(u),$$

där G är primitiv till g och H är på samma sätt som innan en "integrationskonstant" som beror på u . Om man nu byter tillbaka till (x, t) fås

$$f(x, t) = G(x - ct) + H(x + ct). \quad (6)$$

Vilket är en allmän lösning då $G, H \in C^1(\mathbb{R})$.

3 Taylorutvecklingar

Kom ihåg från tidigare analyskurs att Taylorutvecklingar i en variabel är en approximation av ett polynom $f(x)$ i en omgivning av en godtycklig punkt $x = a$,

$$f(a + h) = \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(a)h^j}{j!} + \frac{f^{(k+1)}(\xi)h^{k+1}}{(k+1)!}. \quad (7)$$

För att definiera Taylors formel för flera variabler används definitionen av envariabelfallet.

Vi börjar med att kolla på fallet då $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ där $f(x, y)$ utvecklas kring punkten (a, b) , $f \in C^{k+1}$. Bilda en envariabelsfunktion där h_1 och h_2 är fixa,

$$F(t) = f(a + th_1, b + th_2). \quad (8)$$

Taylorutveckling kring $t = 0$ ger enligt envariabelfallet:

$$F(t) = \sum_{j=0}^k \frac{F^{(j)}(0)t^j}{j!} + \frac{F^{(k+1)}(\xi)t^{k+1}}{(k+1)!}. \quad (9)$$

Vi uttrycker nu derivatorna av F uttryckt i partiella derivator av f . Kedjeregeln ger då efter förenkling att $(x = a + th_1$ och $y = b + th_2)$:

$$F^{(j)}(t) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(j)} f. \quad (10)$$

Utifrån de antaganden som gjorts så formuleras Taylorformeln som följande där $t = 1$:

$$F(1) = f(\vec{a} + \vec{h}) = \sum_{j=0}^k \frac{(\vec{h} \cdot \nabla)^{(j)} f(\vec{a})}{j!} + \frac{(\vec{h} \cdot \nabla)^{(k+1)} f(\vec{\xi})}{(k+1)!} \quad (11)$$

där $\vec{a} = (a, b)$, $\vec{h} = (h_1, h_2)$ och $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$.

Observera att denna formen av Taylorutveckling kan utvidgas till flera dimensioner.

4 Lokala extrempunkter

Ett samlingsnamn för lokal maxi- och minimipunkter är lokala extrempunkter. Definitionen för en lokal extrempunkt lyder:

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ har ett lokalt maximum i $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ om det finns en omgivning Ω av $\vec{a}$ så att $f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$ för alla $\vec{x} \in \Omega$. På samma sätt följer att f har ett lokalt minimum om $f(\vec{x}) \geq f(\vec{a})$.

I definitionen finns inget krav på att f ska vara partiellt deriverbar i punkten $\vec{a}$, men i de fall där funktionen är deriverbar anger följande sats det första steget vid bestämningen av funktionens lokala extrempunkter.

Sats

Om $f(\vec{x})$ har ett lokalt extremvärde i en inre punkt i $\vec{a}$ i definitionsmängden och f är partiellt deriverbar i $\vec{a}$ så är $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$.

5 Klassificering av stationära punkter

Definition

Om $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ och $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$ kallas $\vec{a}$ för en stationär punkt.

Om $\vec{a}$ är en stationär punkt till funktionen f kan den vara en extrempunkt, men den behöver inte vara det. Genom att analysera funktionens Taylorutveckling kan den stationära punktens karaktär undersökas. I det tvådimensionella fallet ger Taylorutvecklingen för en funktion f runt en stationär punkt $\vec{a} = (a, b)$ formeln

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = \frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) + \mathcal{O}((h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}) \quad (12)$$

där $A = f''_{xx}(a, b)$, $B = f''_{xy}(a, b)$ och $C = f''_{yy}(a, b)$. Tecknet på vänsterledet i ekvation 12 kommer oftast att avgöra punktens karaktär.

Den kvadratiske formen för funktioner $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är

$$Q(h, k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2. \quad (13)$$

Den kan tillhöra ett av följande fyra alternativ.

- **Positivt definit**

$Q(h, k) > 0$ för alla $(h, k) \neq (0, 0)$. Då är punkten (a, b) ett strängt lokalt minimum.

- **Negativt definit**

$Q(h, k) < 0$ för alla $(h, k) \neq (0, 0)$. Då är punkten (a, b) ett strängt lokalt maximum.

- **Semidefinit**

Om $Q(h, k) = 0$ tillåts för något $(h, k) \neq (0, 0)$ är den positivt respektive negativt semidefinit. Då krävs en längre Taylorutveckling för att undersöka punktens karaktär.

- **Indefinit**

$Q(h, k)$ antar både negativa och positiva värden. Då är punkten (a, b) en sadelpunkt.

För att avgöra vilket av de fyra ovanstående fallen som inträffar för $Q(h, k)$ finns följande specialregler för det tvådimensionella fallet:

- Om $AC - B^2 > 0$ och $A > 0$ är $Q(h, k)$ positivt definit.
- Om $AC - B^2 > 0$ och $A < 0$ är $Q(h, k)$ negativt definit.
- Om $AC - B^2 < 0$ är $Q(h, k)$ indefinit.
- Om $AC - B^2 = 0$ är $Q(h, k)$ semidefinit.

I flera dimensioner kan den kvadratiske formen skrivas som en funktion

$Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ där $Q(\vec{h}) = \vec{h}^T M \vec{h}$. Här är matrisen M en symmetrisk matris av alla partiella andraderivator. Med hjälp av det karakteristiska polynomet kan egenvärdena till matrisen M bestämmas. På så sätt kan den stationära punktens karaktär undersökas enligt följande påståenden;

- Alla egenvärdena $\lambda_j > 0 \iff Q(h, k)$ är positivt definit.
- Alla egenvärdena $\lambda_j < 0 \iff Q(h, k)$ är negativt definit.
- Om $\lambda_j = 0$ tillåts är $Q(h, k)$ positivt eller negativt semidefinit.
- M har både positiva och negativa egenvärden $\iff Q(h, k)$ är indefinit.

6 Vektorvärda funktioner

Om $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ kallas funktionen vektorvärd. Funktionen $\vec{f}(\vec{x})$ kan då uttryckas som $\vec{f}(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n))$, där varje $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är en skalärvärd funktion. Detta ger att $\vec{f}$ differentierbar i punkten $\vec{a} \iff f_i$ är differentierbar i punkten $\vec{a}$, $\forall i = 1, \dots, p$.

Om $\vec{f}$ är differentierbar kan funktionalmatrisen definieras som

$$\vec{f}'(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Med hjälp av funktionalmatrisen kan $\vec{f}$ kan linjäriseras som

$$\vec{f}(\vec{a} + \vec{h}) = \vec{f}(\vec{a}) + \vec{f}'(\vec{a})\vec{h} + \|\vec{h}\|\vec{\rho}(\vec{h}) \quad (15)$$

där $\vec{a}$ och $\vec{h}$ är punkter i $\mathbb{R}^n$ och $\vec{\rho}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ är en vektorvärdfunktion där $\vec{\rho}(\vec{h}) \rightarrow \vec{0}$.

Om $\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ så kan funktionaldeterminanten definieras som

$$\det(\vec{f}'(\vec{x})) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Nu kan följande sats formuleras, som beskriver sambandet mellan funktionaldeterminanten och en funktions inverterbarhet.

Sats (Inversa funktionssatsen)

Låt $\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{f} \in \mathcal{C}^1(D)$, $\vec{a} \in D$ sådan att $\det(\vec{f}'(\vec{a})) \neq 0$. Då finns öppna omgivningar U kring $\vec{a}$ och V kring $\vec{f}(\vec{a})$ så att:

$$\begin{aligned} \vec{f}: U &\rightarrow V \text{ är bijektiv,} \\ \vec{f}^{-1}: V &\rightarrow U \text{ är } \mathcal{C}^1. \end{aligned}$$

7 Allmänna kedjeregeln

Med den allmänna kedjeregeln menas ett uttryck för derivatan av sammansättningen av två vektorvärda funktioner. Vi kommer göra detta i tre steg, men först definierar vi funktionerna $\vec{g}$ och $\vec{f}$, och en punkt $\vec{t}$ som

$$\vec{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p, \vec{f}: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m, \vec{t} \in \mathbb{R}^n.$$

Eftersom $\vec{f}$ är en vektorvärd funktion kan vi skriva den som

$$\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}) \dots f_m(\vec{x})).$$

I det första steget ska vi bilda en sammansättning med $\vec{f}(\vec{g}(\vec{t}))$ och derivata en av funktionerna f_i med avseende på en av variablerna t_j i $\vec{t}$. Vi får då resultatet

$$\frac{\partial(\vec{f} \circ \vec{g})_i(\vec{t})}{\partial t_j} = \nabla f_i(\vec{g}(\vec{t})) \cdot \frac{\partial \vec{g}(\vec{t})}{\partial t_j}.$$

Men som vi såg i föregående avsnitt kan vi samla alla derivator av $(\vec{f} \circ \vec{g})_i$ i en funktionalmatris. Då får vi att

$$\frac{\partial(\vec{f} \circ \vec{g})(\vec{t})}{\partial t_j} = \vec{f}'(\vec{g}(\vec{t})) \cdot \frac{\partial \vec{g}(\vec{t})}{\partial t_j}.$$

I sista steget ska vi nu samla alla $\vec{g}$:s derivator av $\vec{t}$ i en funktionalmatris, vilket ger oss

$$(\vec{f} \circ \vec{g})'(\vec{t}) = \vec{f}'(\vec{g}(\vec{t})) \cdot \vec{g}'(\vec{t}). \quad (17)$$

Uttryck 17 är alltså den allmänna kedjeregeln. Resultatet liknar kedjeregeln i en variabel, men svaret vi får ut kommer vara en $m \times n$ -matris eftersom vi har m olika funktioner och n variabler (ty $\vec{f}: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ och $\vec{t} \in \mathbb{R}^n$).

8 Koordinatbyten

Med hjälp av kedjeregeln och räkneregler för determinanter är det även möjligt att härleda funktionaldeterminanten av en sammansatt funktion,

$$\det((\vec{f} \circ \vec{g})'(\vec{t})) = \det(\vec{f}'(\vec{g}(\vec{t}))\vec{g}'(\vec{t})) = \det(\vec{f}'(\vec{g}(\vec{t}))) \det(\vec{g}'(\vec{t})). \quad (18)$$

Denna likhet kommer att användas nedan för att härleda ett samband mellan funktionaldeterminanten av en funktion och funktionaldeterminanten av dess invers.

Studera ett koordinatbyte i $\mathbb{R}^n$

$$(x_1, \dots, x_n) \longleftrightarrow (y_1, \dots, y_n). \quad (19)$$

Det är då möjligt att uttrycka de nya variablerna i de gamla

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ y_n &= y_n(x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (20)$$

Betrakta detta som en funktion $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ett koordinatbyte behöver kunna inverteras. För att detta ska vara möjligt i en omgivning av $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ måste $\det(\vec{f}'(\vec{x})) \neq 0$, enligt inversa funktions-satsen.

Sätt $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$. Det inversa koordinatbytet ges då av $\vec{x} = \vec{f}^{-1}(\vec{y})$. Sammansättningen av dessa två funktioner, $\vec{y} = (\vec{f} \circ \vec{g})(\vec{y}) = \vec{f}(\vec{f}^{-1}(\vec{y}))$ har, enligt kedjeregeln och inversa funktions-satsen följande funktionalmatris:

$$\vec{f}'(\vec{x})(\vec{f}'(\vec{x}))^{-1} = I \quad (21)$$

där I är en $n \times n$ identitetsmatris. Även följande uttryck för funktionaldeterminanterna kan härledas enligt

$$\det(\vec{f} \circ \vec{g})(\vec{y}) = \det(\vec{f}'(\vec{x})(\vec{f}'(\vec{x}))^{-1}) = \det(\vec{f}'(\vec{x})) \det((\vec{f}'(\vec{x}))^{-1}) = 1. \quad (22)$$

9 Implicita funktionssatsen

Om vi låter $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vara en C^1 -funktion och punkten $\vec{a}$ vara en punkt på nivå(hyper)ytan $F(\vec{x}) = C$. Om

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} \neq 0 \quad (23)$$

så finns det en omgivning U kring punkten $\vec{a}$ sådan att restriktionen av nivå(hyper)ytan till U implicit definerar en C^1 -funktion $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sådan att:

$$x_k = f_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \quad (24)$$

och dess derivata gäller:

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial x_k}}, \forall i \neq k \quad (25)$$

9.1 Grafisk tolkning i två variabler

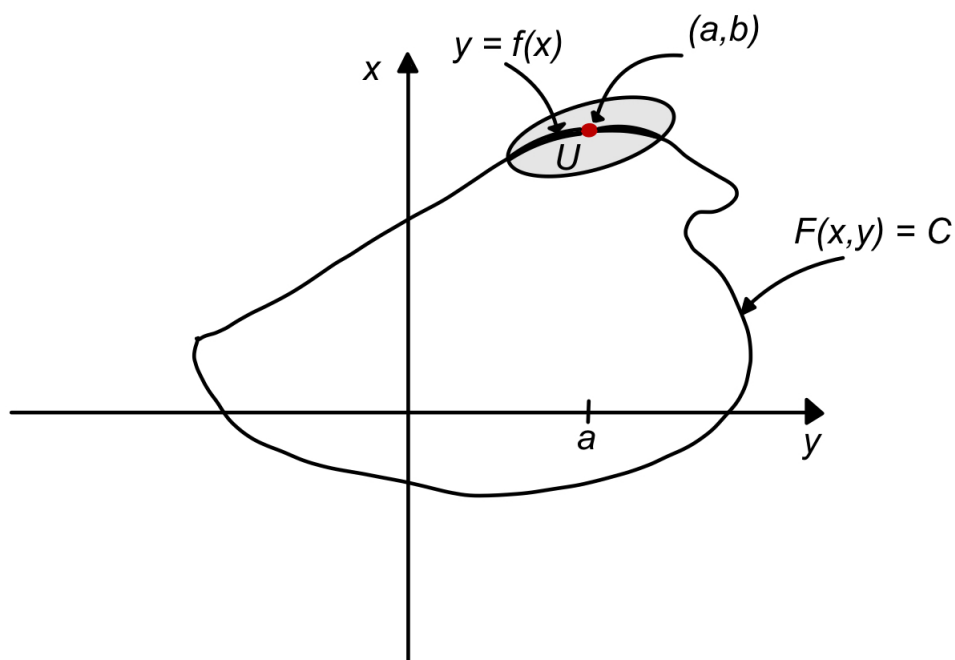
Låt

$$F(x, y) = C \quad (26)$$

beteckna en nivåkurva. Vi vet att punkten (a, b) ligger på kurvan och att $F'_y(a, b) \neq 0$. Enligt satsen definierar denna ekvation kring en öppen omgivning U av (a, b) implicit en kontinuerlig deriverbar funktion $y = f(x)$ och dess derivata blir således

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} \quad (27)$$

Figur 2 visar en grafisk tolkning av hur det kan se ut i två variabler.



Figur 2: Grafisk tolkning av hur det kan se ut med två variabler.