Demonstration 3

MVE035/MVE600 - Flervariabelanalys

Hampus Renberg Nilsson, MSc.
Hampus.Renberg.Nilsson@chalmers.se

Våren 2022

Dagens genomgång: 3.9d, 3.28, 3.33, 6.16, 6.21

Uppgift 3.9d

Bestäm funktionalmatrisen till följande avbildningar:

$$\text{d)} \quad \begin{cases} y_1 = x_1^2 - x_2^2, \\ y_2 = 2x_1x_2 \end{cases} \tag{1}$$

Lösning

Funktionalmatrisen av $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ ges av

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Uppgift 3.28

a) Visa att ytan $\mathrm{e}^{z-1} + zy + x - 2y^3 = 0$ går genom punkten $P : (0, 1, 1)$ och bestäm en ekvation för tangentplanet i punkten.

b) Avgör om ytan kan framställas på formen $z = f(x, y)$ i en omgivning av punkten P.

Lösning a)

Sätt

$$f(x, y, z) = \mathrm{e}^{z-1} + zy + x - 2y^3. \tag{3}$$

Eftersom

$$f(0, 1, 1) = \mathrm{e}^{1-1} + 1 \cdot 1 + 0 - 2 \cdot 1^3 = 1 + 1 + 0 - 2 = 0 \tag{4}$$

ligger P på nivåytan $f(x, y, z) = 0$. För att finna tangentplanets normal beräknar vi

$$\nabla f = \left(1, z - 6y^2, y + \mathrm{e}^{z-1}\right) \tag{5}$$

vilket i P är

$$\nabla f(0,1,1) = (1, 1-6, 1+1) = (1,-5,2). \tag{6}$$

Då är tangentplanets ekvation

$$\begin{aligned} f'_x(x-x_0) + f'_y(y-y_0) + f'_z(z-z_0) &= 0 \\ 1(x-0) - 5(y-1) + 2(z-1) &= 0 \quad \implies \quad x - 5y + 2z + 3 = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Lösning b)

Eftersom

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,1,1) = 2 \neq 0 \tag{8}$$

så följer av implicita funktionssatsen att $f(x,y,z) = 0$ nära P definierar z som en funktion av x och y.

Uppgift 3.33

Visa att ytorna $x^2 - y^2 - z^2 = -1$ och $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ i en omgivning av $(1,1,1)$ skär varandra längs en kurva. Bestäm ekvationen för tangenten i $(1,1,1)$ till kurvan.

Lösning

Sätt

$$\begin{cases} f(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2 + 1, \\ g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6. \end{cases} \tag{9}$$

Om antingen $\dfrac{\mathrm{d}(f,g)}{\mathrm{d}(x,y)} \neq 0$, $\dfrac{\mathrm{d}(f,g)}{\mathrm{d}(y,z)} \neq 0$ eller $\dfrac{\mathrm{d}(f,g)}{\mathrm{d}(z,x)} \neq 0$ då $(x,y,z) = (1,1,1)$ så kan vi lokalt parametrisera skärningskurvan given av

$$\begin{cases} f(x,y,z) &= 0, \\ g(x,y,z) &= 0 \end{cases} \tag{10}$$

med z, x eller y som parameter. Låt oss undersöka en av dem,

$$\frac{\mathrm{d}(f,g)}{\mathrm{d}(y,z)} = \begin{vmatrix} -2y & -2z \\ 4y & 6z \end{vmatrix} = -2y \cdot 6z - (-2z) \cdot 4y = 8yz - 12yz = -4yz. \tag{11}$$

I punkten $(1,1,1)$ har vi alltså att

$$\left. \frac{\mathrm{d}(f,g)}{\mathrm{d}(y,z)} \right|_{(1,1,1)} = -4 \neq 0, \tag{12}$$

vilket innebär att kurvan kan framställas med x som parameter. Vi kan alltså sätta

$$\begin{cases} x = t, \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \tag{13}$$

Då kan vi skriva våra funktioner som

$$\begin{cases} f(t) = t^2 - y^2(t) - z^2(t) + 1, \\ g(t) = t^2 + 2y^2(t) + 3z^2(t) - 6. \end{cases} \tag{14}$$

Tangenten kan skrivas på parameterform

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(x_1, y_1, z_1) \tag{15}$$

där (x_0, y_0, z_0) är punkten $(1, 1, 1)$, eller någon annan punkt på tangenten, och (x_1, y_1, z_1) är en vektor i tangentens riktning. Tangentens riktning ges av $(x'(1), y'(1), z'(1)) = (1, y'(1), z'(1))$.

Vi söker alltså $y'(1), z'(1)$. Genom implicit derivering fås att

$$\begin{cases} f'(t) = 2t - 2y(t)y'(t) - 2z(t)z'(t), \\ g'(t) = 2t + 4y(t)y'(t) + 6z(t)z'(t). \end{cases} \tag{16}$$

Låt oss nu använda att $(x, y, z) = (t, y(t), z(t)) = (1, 1, 1)$ i punkten, samt att $(f'(t), g'(t)) = (0, 0)$ vilket vi vet från villkoret i Ekvation (10). Då får vi ekvationerna

$$\begin{aligned} 2 - 2y'(1) - 2z'(1) = 0, \quad & \boxed{2} \\ 2 + 4y'(1) + 6z'(1) = 0. \quad & \end{aligned} \tag{17}$$

Vi adderar den första gånger 2 till den andra och får

$$6 + 2z'(1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad z'(1) = -3. \tag{18}$$

Sedan kan vi använda detta i den första ekvationen, så får vi

$$2 - 2y'(1) - 2 \cdot (-3) = 2 - 2y'(1) + 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y'(1) = 4. \tag{19}$$

Alltså kan tangenten beskrivas med ekvationen

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(1, 4, -3). \tag{20}$$

Uppgift 6.16

Beräkna

$$\iint_D \frac{xy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y}{(1 + y^2)^2} \tag{21}$$

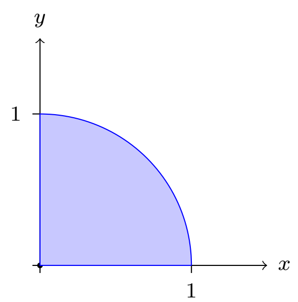
där $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Lösning

Hur ser området ut?

$$\begin{aligned} x \geq 0, y \geq 0 \quad &\Longrightarrow \quad \text{Första kvadranten.} \\ x^2 + y^2 \leq 1 \quad &\Longrightarrow \quad \text{Området innanför enhetscirkeln.} \end{aligned} \tag{22}$$

Låt oss skissa!



Hur sätter vi gränserna för integralerna?

Vi kan ej låta både x och y gå från 0 till 1, ty då får vi ett för stort område (en 1×1-kvadrat).

Vi skulle kunna övergå till polära koordinater, men här funkar det utmärkt att uttrycka y-gränserna som en funktion av x.

Längs kurvan har vi att $y = \sqrt{1-x^2}$. Vi kan alltså låta x gå från 0 till 1 och y från 0 till $\sqrt{1-x^2}$. Då får vi att integralen ges av

$$I = \iint\limits_D \frac{xy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y}{\left(1+y^2\right)^2} = \int\limits_0^1 x \underbrace{\left(\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y \,\mathrm{d}y}{\left(1+y^2\right)^2} \right)}_{\clubsuit} \mathrm{d}x. \tag{23}$$

Vi beräknar delintegralen $\clubsuit$ separat (för att spara plats). Notera att den är mycket lik

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \frac{1}{1+y^2} = -\left(1+y^2\right)^{-2} \cdot 2y = \frac{-2y}{\left(1+y^2\right)^2} \tag{24}$$

så vi slänger in lämpliga konstanter och får

$$\clubsuit = -\frac{1}{2} \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{-2y \,\mathrm{d}y}{\left(1+y^2\right)^2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+y^2} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2-x^2} - 1 \right). \tag{25}$$

Låt oss nu använda detta i I och vi får

$$I = -\frac{1}{2} \int\limits_0^1 x \left(\frac{1}{2-x^2} - 1 \right) \mathrm{d}x. \tag{26}$$

Denna integral kan vi dela upp i två delintergraler,

$$\int\limits_0^1 \frac{x}{2-x^2} \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \int\limits_0^1 \frac{-2x}{2-x^2} \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \left[\ln\left(2-x^2\right) \right]_0^1 = -\frac{1}{2} (\ln 1 - \ln 2) = \frac{\ln 2}{2} \tag{27}$$

och

$$\int\limits_0^1 x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}. \tag{28}$$

Den sökta integralen ges alltså av

$$I = -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1 - \ln 2}{4} \tag{29}$$

Uppgift 6.21

Beräkna

$$\iint\limits_D \ln\left(1 + x^2 + y^2\right) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \tag{30}$$

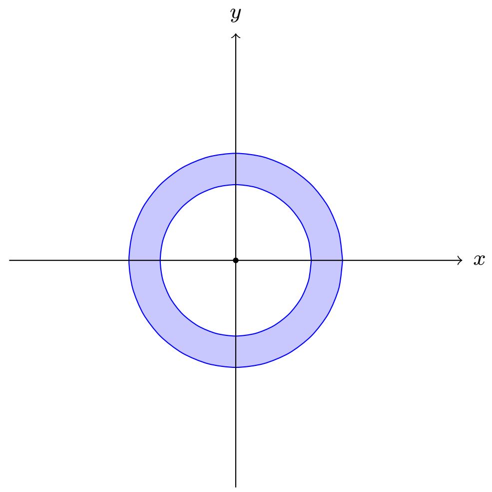
där $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$.

Lösning

Hur ser området ut?

$$\begin{aligned} x^2+y^2 \geq 1 &\implies \text{Området utanför enhetscirkeln.} \\ x^2+y^2 \leq 2 &\implies \text{Området innanför cirkel med radie } \sqrt{2}. \end{aligned} \tag{31}$$

Låt oss skissa!



Hur sätter vi gränserna för integralerna?

Vi skulle kunna uttrycka gränserna i x och y genom att beräkna två integraler, men det blir jobbigt.

Här passar det däremot utmärkt med polära koordinater!

I polära koordinater $\{(r,\theta) : x = r\cos\theta, y = r\sin\theta\}$ ges området enkelt av att låta r gå från 1 till $\sqrt{2}$ och θ från 0 till 2π. Då får vi att integralen ges av

$$I = \iint_D \ln\left(1+x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} \ln\left(1+r^2\right) r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = 2\pi\int_1^{\sqrt{2}} \ln\left(1+r^2\right) r\,\mathrm{d}r. \tag{32}$$

Notera den extra faktorn r som kommer från att $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$!

Vi kan nu använda variabelsubstitutionen

$$t = 1+r^2, \quad \mathrm{d}t = 2r\,\mathrm{d}r, \quad r = 1 \implies t = 2, \quad r = \sqrt{2} \implies t = 3. \tag{33}$$

Då får vi att

$$I = \pi\int_2^3 \ln t\,\mathrm{d}t = \pi\,\underbrace{\left[t\ln t - t\right]_2^3}_{\spadesuit}. \tag{34}$$

Vi beräknar $\spadesuit$ separat,

$$\spadesuit = (3\ln 3 - 3) - (2\ln 2 - 2) = \ln 27 - \ln 4 - 1 = \ln\frac{27}{4} - 1, \tag{35}$$

och alltså har vi att

$$I = \pi\left(\ln\frac{27}{4} - 1\right). \tag{36}$$