

Demonstration 4

MVE035/MVE600 - Flervariabelanalys

Hampus Renberg Nilsson, MSc.

`Hampus.Renberg.Nilsson@chalmers.se`

Våren 2022

Dagens genomgång: 7.4, 7.15, 8.7, 8.31

Uppgift 7.4

Beräkna

$$\iiint_D \frac{z \, dx \, dy \, dz}{1 + x^2 + y^2} \quad (1)$$

där $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

Lösning

Hur ser området ut?

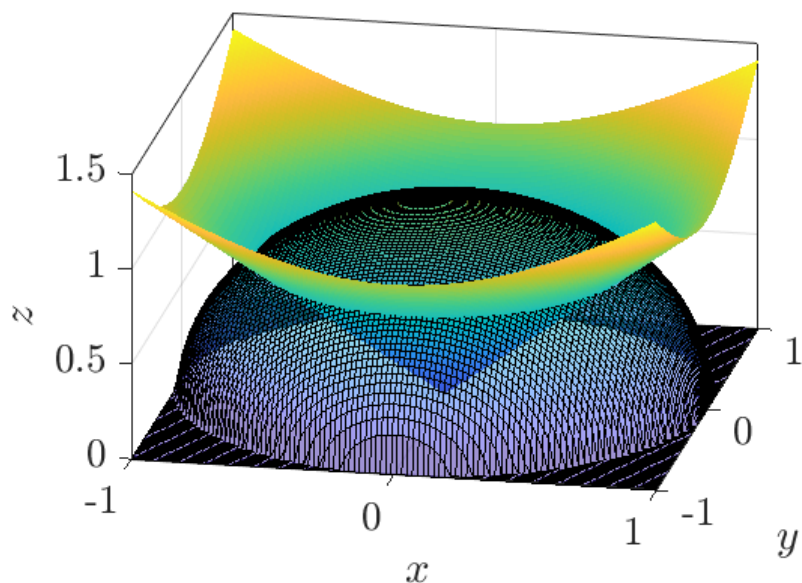
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 &\implies \text{Området innanför enhetssfären.} \\ z \geq \sqrt{x^2 + y^2} &\implies \text{Lite klurigare! Låt oss undersöka saken.} \end{aligned} \quad (2)$$

För $z < 0$ finns det inga x, y som uppfyller andra olikheten.

För $z = 0$ uppfyller enbart $(x, y) = (0, 0)$ andra olikheten.

För $z > 0$ kan vi skriva om andra olikheten till $z^2 \geq x^2 + y^2$. Vi får alltså en cirkel i xy -planet med radie z !

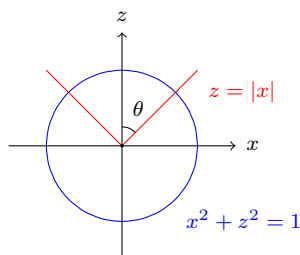
Likheten $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ger oss alltså en upp-och-ner-vänd kon med dess udd i origo, se Figur 1. Olikheten ges oss alltså alla punkter "innanför" denna kon.



Figur 1: De två områdena.

Hur ska vi hitta lämpliga gränser för vår integral då?

Eftersom området är symmetriskt i x, y , kan vi nöja oss med att studera området i xz -planet. Då har vi att $x^2 + z^2 \leq 1$ och $z \geq \sqrt{x^2} = |x|$.



Området kan alltså i sfäriska koordinater

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (3)$$

beskrivas med gränserna

$$r \in [0, 1], \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]. \quad (4)$$

Vi får då att vår integral är

$$I = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \frac{r \cos \theta \cdot r^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, dr}{1 + r^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\theta) \sin^2(\varphi)} = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \frac{r^3 \cos \theta \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, dr}{1 + r^2 \sin^2(\theta)}. \quad (5)$$

Glöm inte faktorn $r^2 \sin \theta$!

Vi kan nu notera att vår integral saknar φ -beroende. Vi kan alltså reducera den till en dubbelintegral,

$$I = 2\pi \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^3 \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, dr}{1 + r^2 \sin^2(\theta)}. \quad (6)$$

Vidare kan vi notera att täljaren liknar derivatan (m.a.p. θ) av nämnaren, påminn er om sambandet

$$\frac{d}{dt} \ln(f(t)) = \frac{1}{f(t)} \cdot f'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}. \quad (7)$$

Vi provar därför att derivera $\ln$ av nämnaren,

$$\frac{d}{d\theta} \ln(1 + r^2 \sin^2(\theta)) = \frac{1}{1 + r^2 \sin^2(\theta)} \cdot 2r^2 \sin \theta \cdot \cos \theta. \quad (8)$$

Genom att flytta runt konstanterna något kan vi alltså beräkna θ -integralen,

$$I = \pi \int_0^1 r \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2r^2 \cos \theta \sin \theta d\theta}{1 + r^2 \sin^2(\theta)}}_{\star} dr. \quad (9)$$

Vi beräknar $\star$ separat,

$$\star = \left[\ln(1 + r^2 \sin^2(\theta)) \right]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} = \ln\left(1 + r^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - \ln(1) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}r^2\right). \quad (10)$$

Vi har alltså nu reducerat ned den sökta integralen till en envariabelintegral,

$$I = \pi \int_0^1 r \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{2}r^2\right) dr = \left\{ \begin{array}{l} t = 1 + \frac{1}{2}r^2 \\ dt = r dr \\ t \in [1, 3/2] \end{array} \right\} = \pi \int_1^{\frac{3}{2}} \ln(t) dt. \quad (11)$$

Slutligen får vi alltså att

$$I = \pi \left[t \ln(t) - t \right]_1^{\frac{3}{2}} = \pi \left(\frac{3}{2} \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} - 1 \ln(1) + 1 \right) = \frac{\pi}{2} \left(3 \ln\left(\frac{3}{2}\right) - 1 \right). \quad (12)$$

Uppgift 7.15

Beräkna

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-r}}{r} dx dy dz \quad (13)$$

där $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Lösning

Vi skulle kunna försöka integrera med gränserna i kartesiska koordinater, $x, y, z \in (-\infty, \infty)$, men uppgiften uttryckligen skriker sfäriska koordinater, så låt oss pröva med dem! Vi får då

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{e^{-r}}{r} \cdot r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr = \int_0^\infty r e^{-r} \int_0^\pi \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi d\theta dr \\ &= \underbrace{\int_0^\infty r e^{-r} dr}_{\clubsuit} \cdot \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta d\theta}_{\heartsuit} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{\spadesuit}. \end{aligned} \quad (14)$$

Vi har nu brutit ned integralen i tre oberoende envariabelintegraler. Vi ser direkt att $\spadesuit = 2\pi$. Integralen $\heartsuit$ är också ganska enkel,

$$\heartsuit = \left[-\cos \theta \right]_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = 2. \quad (15)$$

Den bökgigaste integralen är $\clubsuit$. Om man är bekant med Π -funktionen (eller Γ -funktionen) vet man att svaret är 1, men annars får man beräkna det med partiell integration,

$$\clubsuit = \left[-re^{-r} \right]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-r} dr = 0 + \left[-e^{-r} \right]_0^\infty = (-0) - (-1) = 1. \quad (16)$$

Den sökta integralen är alltså

$$I = \clubsuit \cdot \heartsuit \cdot \spadesuit = 1 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi. \quad (17)$$

Volymen av en kropp

Volymen V av en kropp i område D ges av

$$V = \iiint_D dx dy dz, \quad (18)$$

vilket ni kan tänka som att om vi summerar alla små volymer inuti D , utan att vikta dem med någon funktion (integranden), summerar de rimligen till den hela volymen.

Uppgift 8.7

Beräkna volymen av den kropp som begränsas av olikheterna

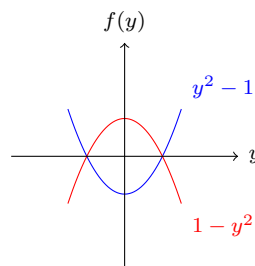
$$0 \leq z \leq 10 - x^2 - y^2, \quad x + 1 - y^2 \geq 0, \quad x + y^2 - 1 \leq 0. \quad (19)$$

Lösning

Vi kan skriva om och sätta samman de två senare olikheterna till

$$y^2 - 1 \leq x \leq 1 - y^2. \quad (20)$$

Utöver att ge oss gränserna för x , ser vi också i detta uttryck att $y \in [-1, 1]$.



Den sökta volymen kan alltså skrivas

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 \int_{y^2-1}^{1-y^2} \int_0^{10-x^2-y^2} dz dx dy = \int_{-1}^1 \int_{y^2-1}^{1-y^2} (10 - x^2 - y^2) dx dy \\ &= 2 \int_{-1}^1 \left[(10 - y^2)x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{1-y^2} dy = 2 \int_{-1}^1 \left((10 - y^2)(1 - y^2) - \frac{1}{3}(1 - y^2)^3 \right) dy. \end{aligned} \quad (21)$$

Integranden I' kan vi förenkla något,

$$I' = 10 - 10y^2 - y^2 + y^4 - \frac{1}{3}(1 - 3y^2 + 3y^4 - y^6) = \frac{29}{3} - 10y^2 + \frac{1}{3}y^6. \quad (22)$$

Vi kan alltså beräkna volymen att bli

$$V = 4 \left[\frac{29}{3}y - \frac{10}{3}y^3 + \frac{1}{21}y^7 \right]_0^1 = 4 \left(\frac{29}{3} - \frac{10}{3} + \frac{1}{21} \right) = \dots = \frac{536}{21}. \quad (23)$$

Uppgift 8.31

a) Beräkna volymen av den ändliga kropp K som begränsas av ytorna

$$z = 2 - x^2 - y^2 \quad \text{och} \quad z = y^2. \quad (24)$$

b) Bestäm masscentrum $x_{\text{mc}}, y_{\text{mc}}, z_{\text{mc}}$ för kroppen K . Masscentrums koordinater ges av

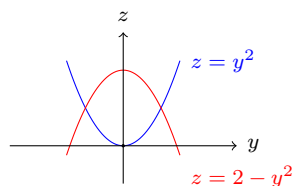
$$x_{\text{mc}} = \frac{\iiint_K x \, dx \, dy \, dz}{\iiint_K dx \, dy \, dz}, \quad y_{\text{mc}} \text{ och } z_{\text{mc}} \text{ analogt.} \quad (25)$$

Lösning a)

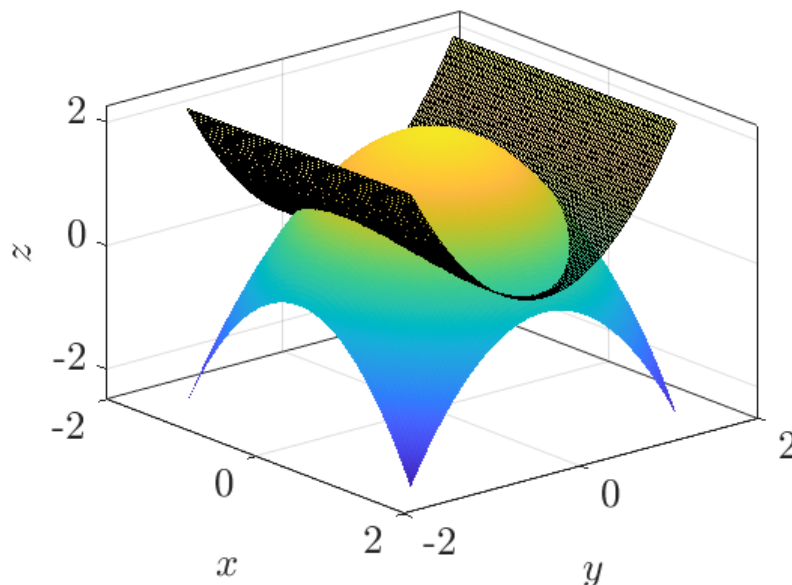
Vi börjar med att identifiera området.

$$\begin{aligned} z = y^2 &\implies \text{En } y = x^2\text{-kurva, fast i } yz\text{-planet.} \\ z = 2 - x^2 - y^2 &\implies \text{Lite klurigare! Låt oss undersöka saken.} \end{aligned} \quad (26)$$

Eftersom sambandet är symmetriskt i x, y , kan vi nöja oss med att studera området i yz -planet. Då har vi de två sambanden $z = y^2$ och $z = 2 - y^2$.



Om vi skissar detta i 3 dimensioner, får vi alltså något som liknar Figur 2.



Figur 2: De två ytorna.

Vi kan se att $z \in [y^2, 2 - x^2 - y^2]$, men hur hittar vi gränserna för x och y ?

Vi har att

$$\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2 \\ z = y^2 \end{cases} \implies y^2 = 2 - x^2 - y^2 \implies \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 = 1 \quad (27)$$

vilket är en ellips i xy -planet, som vi enkelt kan uttrycka i polära koordinater,

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2}\rho \cos \varphi, \\ y &= \rho \sin \varphi, \\ dx dy &= \sqrt{2}\rho d\varphi d\rho. \end{aligned} \quad (28)$$

Volymen kan alltså beräknas enligt

$$\begin{aligned} V &= \iiint_K dx dy dz = \iint_S \int_{y^2}^{2-x^2-y^2} dz dx dy = \iint_S (2 - x^2 - 2y^2) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2 - 2\rho^2 \cos^2(\varphi) - 2\rho^2 \sin^2(\varphi)) \sqrt{2}\rho d\varphi d\rho = \sqrt{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2\rho - 2\rho^3) d\varphi d\rho \\ &= 2\pi\sqrt{2} \left[\rho^2 - \frac{1}{2}\rho^4 \right]_0^1 = 2\pi\sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \pi\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Lösning b)

Vi kan egentligen direkt säga att $x_{\text{mc}} = 0$ och $y_{\text{mc}} = 0$, ty kroppen ligger symmetriskt runt z -axeln, men låt oss visa det med beräkningar också!

Vi beräknar täljaren till x_{mc} ,

$$\begin{aligned}
 x_{\text{mc}}V &= \iiint_K x \, dx \, dy \, dz = \iint_S x \int_{y^2}^{2-x^2-y^2} dz \, dx \, dy = \iint_S x (2 - x^2 - 2y^2) \, dx \, dy \\
 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\rho \cos \varphi (2 - 2\rho^2 \cos^2(\varphi) - 2\rho^2 \sin^2(\varphi)) \sqrt{2}\rho \, d\varphi \, d\rho \\
 &= 2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi}_{{=0}} \int_0^1 (2\rho^2 - 2\rho^4) \, d\rho = 0.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Analogt får vi för y_{mc} att

$$y_{\text{mc}}V = \iiint_K y \, dx \, dy \, dz = \dots = \sqrt{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \varphi \, d\varphi}_{{=0}} \int_0^1 (2\rho^2 - 2\rho^4) \, d\rho = 0. \tag{31}$$

För z_{mc} får vi däremot

$$z_{\text{mc}}V = \iiint_K z \, dx \, dy \, dz = \iint_S \int_{y^2}^{2-x^2-y^2} z \, dz \, dx \, dy = \frac{1}{2} \iint_S \underbrace{[z^2]_{y^2}^{2-x^2-y^2}}_{\diamond} \, dx \, dy. \tag{32}$$

Låt oss beräkna $\diamond$ separat,

$$\diamond = (2 - x^2 - y^2)^2 - y^4 = [\text{Konjugatregeln}] = (2 - x^2) (2 - x^2 - 2y^2), \tag{33}$$

så vi har att

$$\begin{aligned}
 z_{\text{mc}}V &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2 - 2\rho^2 \cos^2(\varphi)) (2 - 2\rho^2 \cos^2(\varphi) - 2\rho^2 \sin^2(\varphi)) \sqrt{2}\rho \, d\varphi \, d\rho \\
 &= 2\sqrt{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - \rho^2 \cos^2(\varphi)) (1 - \rho^2) \rho \, d\varphi \, d\rho \\
 &= 2\sqrt{2} \int_0^1 \rho (1 - \rho^2) \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} (1 - \rho^2 \cos^2(\varphi)) \, d\varphi}_{I_\varphi} \, d\rho.
 \end{aligned} \tag{34}$$

Låt oss nu beräkna I_φ separat,

$$I_\varphi = 2\pi - \rho^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) \, d\varphi = 2\pi - \rho^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2} \, d\varphi = 2\pi - \pi\rho^2. \tag{35}$$

Vi fortsätter vår beräkning,

$$\begin{aligned}
 z_{\text{mc}}V &= 2\pi\sqrt{2} \int_0^1 \rho (1 - \rho^2) (2 - \rho^2) \, d\rho = 2\pi\sqrt{2} \int_0^1 (2\rho - 3\rho^3 + \rho^5) \, d\rho \\
 &= 2\pi\sqrt{2} \left[\rho^2 - \frac{3}{4}\rho^4 + \frac{1}{6}\rho^6 \right]_0^1 = 2\pi\sqrt{2} \left(1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{6} \right) = 2\pi\sqrt{2} \frac{3+2}{12} = \pi\sqrt{2} \frac{5}{6}
 \end{aligned} \tag{36}$$

och alltså att $z_{\text{mc}} = 5/6$.

Masscentrum ligger alltså i $(0, 0, 5/6)$.