

Tavelpresentation 3B

Albin Blomster, Ellen Carlsson, Albert Hansson,
Alexander Karlsson, Carl Löv, Victor Widéen

4 februari 2022

1 Föreläsning 1

Denna vecka påbörjade vi integraler av flervariabelfunktioner. En flervariabelfunktion har inte enbart en derivata. Därför har dessa funktioner inte heller en uppenbar generalisering av en primitiv funktion.

1.1 Integral av en variabel

Vi börjar med att minnas integraler för en variabel. Från envariabelanalysen känner vi till analysens fundamentalsats som beskriver bestämda integraler för envariabelfunktioner. Eftersom satsen är baserad att det finns en primitiv funktion till funktionen f fungerar inte denna i flervariabelfallet.

$$F' = f \Rightarrow \int_a^b f(x) = F(b) - F(a). \quad (1)$$

Vi tittar därför på den informella tolkingen av integraler. Om $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kan en bestämd integral ses som area med tecken. Alla ytor över x -axeln har en positiv area medan ytor under x -axeln har en negativ area. Detta innebär att en symmetrisk funktion med lika stor area över och under x -axeln kommer ha en integral som är lika med noll. Rigoröst beskrivs integralen med Riemannsummor, men på grund av integralens egenskap att beskrivas som en area kan vi informellt bestämma integralen till en summa av rektanglar. Rektanglarna har en infinitesimal bas, dx , och höjden $f(x)$. Integralen är summan av dessa rektanglar över ett visst intervall.

1.2 Dubbelintegral

Nu översätter vi vår kunskap om envariabelintegraler till integraler för två variabler. Om $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig och vi låter $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en kompakt mängd kan vi informellt beskriva integralen av f som volymen med tecken mellan grafen $z = f(x, y)$ och området D i xy -planet. Idén liknar den i envariabelfallet. D är ytan som integralen täcker på xy -planet och detta område delas in i rektanglar

med sidorna dx , dy . Höjden för varje delområde är funktionsvärdet $f(x, y)$. Multiplicerar vi dessa kanter får vi volymen av ett rätblock $dV = f(x, y)dxdy$. För den fullständiga integralen adderas volymen av varje rätblock för hela området D . Även för dubbelintegraler gäller det att dx samt dy är infinitesimalt små för en korrekt uppskattning av integralen samt att alla volymer över xy -planet är positiva och de under är negativa.

1.2.1 Beräkningstekniker

För att beräkna en integral av två variabler finns det som sagt ingen generell primitiv funktion som det gör för envariabelfallet. Därför använder vi oss av några olika tekniker. För det första kan vi använda oss av inspektion. Då kan vi utnyttja att dubbelintegraler beskriver en volym med tecken. Vi kan även utnyttja symmetrier i funktionen eller linearitet. Ett ytterligare sätt att beräkna dubbelintegraler är med hjälp av Fubinis sats. Den innebär att vi kan räkna en dubbelintegral som två envariabelintegraler. Vi kan även lösa integraler med variabelbyten samt nivåkurvor.

1.2.2 Inspektion

Vi går lite djupare in på hur vi kan använda oss av inspektion. Här har vi tre viktiga iakttagelser.

(i) Integralen är en linjär operation.

$$\begin{aligned}\int_a^b (\alpha f + \beta g)dx &= \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx \\ \iint_D (\alpha f + \beta g)dxdy &= \alpha \iint_D f dxdy + \beta \iint_D g dxdy\end{aligned}\tag{2}$$

(ii) Vi kan dela upp området D i delområden.

$$D = D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 = \emptyset,\tag{3}$$

vilket ger oss

$$\iint_D f dxdy = \iint_{D_1} f dxdy + \iint_{D_2} f dxdy.\tag{4}$$

(iii) Vi kan även använda oss av medelvärde på integralen. I envariabelfallet får vi medelvärde av f på $a \leq x \leq b$ genom

$$\frac{1}{\mu(D)} \int_a^b f(x)dx, \text{ där } \mu(D) = b - a.\tag{5}$$

I $\mathbb{R}^2$ är medelvärde för f på D

$$\frac{1}{\mu(D)} \iint_D f dxdy,\tag{6}$$

där $\mu(D)$ är arean av D .

1.2.3 Fubinis sats

Fubinis sats är som sagt ett sätt att dela upp en dubbelintegral i två enkelnintegraler. Vi börjar med att definiera Fubinis sats för en axelparallell rektangel.

Definition: Låt $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ så att $a \leq b, c \leq d$. Mängden

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} = [a, b] \times [c, d] \quad (7)$$

kallas en axelparallell rektangel och har sidorna $b - a$ som är parallell med x -axeln och $d - c$ som är parallell med y -axeln.

Sats: Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ vara en axelparallell rektangel och $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ vara kontinuerlig. Då gäller

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx. \quad (8)$$

Viktigt att veta om ekvationen är att i de inre integralerna betraktas den andra variabeln som konstant. När x integreras är y konstant och tvärtom. Dessutom spelar ordningen ingen roll, så som ekvationen visar. Vi kommer alltså få samma svar oavsett om vi integrerar över x eller y först. Däremot kan det vara avgörande beräkningstekniskt då ena variabeln kan vara svår eller omöjlig att integrera över först. Sedan är det viktigt att vara medveten om att vi vanligtvis inte skriver med parenteser runt den inre integralen. Då läser man inifrån och ut för att avgöra vilken variabel som har vilka gränser.

$$\begin{aligned} \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy, a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \\ \int_c^d \int_a^b f(x, y) dy dx, c \leq x \leq d, a \leq y \leq b. \end{aligned} \quad (9)$$

2 Föreläsning 2

2.1 Fubinis sats för reguljära områden

Som en förlängning av integralberäkning i flera variabler av rektangulära områden har vi Fubinis sats i reguljära områden, där reguljära områden är mer generaliserade områden än rektangulära områden. Den formella definitionen av ett reguljärt område i x -led är att området D kan delas upp i ändligt många delområden, där vardera delområde har formen

$$D_i = \{(x, y) \mid a_i \leq x \leq b_i, \alpha_i(x) \leq y \leq \beta_i(x)\},$$

där $\alpha_i(x), \beta_i(x) \in C^1$ och $\alpha_i(x) \leq \beta_i(x) \forall x \in [a_i, b_i]$.

Definitionen av ett område som är reguljärt i y -led är analogt. Ett område som är reguljärt i x - och y -led kallas reguljärt.

2.1.1 Sats 6.2.4 (s.246)

Om f är kontinuerlig på en mängd D som ges av

$$\{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\},$$

där $\alpha, \beta \in C^1$ och $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{så får vi } \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy dx.$$

Sats 6.2.4 ger oss möjligheten att räkna på reguljära områden. Om D också kan skrivas på formen

$$\{(x, y) \mid c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}, \text{ där } \varphi, \psi \in C^1 \text{ gäller även att}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx dy.$$

Det är värt att notera att resultatet blir detsamma oavsett om vi integrerar med avseende på x eller y först. Viktigt är däremot att använda olika gränser beroende på vilken variabel som integreras först. Dock kan en skillnad vara att i vissa fall kan den ena variabeln medföra mera beräkningstekniska problem än den andra variabeln.

2.2 Nollmängder och kvadrerbara mängder

2.2.1 Definition 6.2.4 (s.242)

En mängd $N \subset \mathbb{R}^2$ kallas nollmängd om vi för varje $\varepsilon > 0$ kan täcka N med ändligt många axelparallella rektanglar med en total area $\leq \varepsilon$. En mängd $D \subset \mathbb{R}^2$ är kvadrerbar om dess rand är en nollmängd.

Utifrån sats 6.2.4. så kan vi sedan urskilja vissa följder. En följd är att för en godtycklig kontinuerlig funktion $\phi(x)$ inom ett intervall $a \leq x \leq b$ så utgör grafen en nollmängd. Denna konsekvens kan sedan ytterligare tillämpas på fler-variabelfallet i enlighet med lemma 6.2.3 nedan.

2.2.2 Lemma 6.2.3. (s.244)

För varje begränsad funktion f som är integrerbar över en nollmängd N så gäller att

$$\iint_N f dx dy = 0, \text{ alternativt arean } \mu(N) = 0.$$

Rent konkret kan vi notera att sats 6.2.4. samt lemma 6.2.3. säger två huvudsaker. Det ena är att reguljära områden är kvadrerbara områden. Vi kan även urskilja att vid integralberäkningar i flervariabelfallet så kan vi integrera på ett liknande sätt som i envariabelfallet.

2.3 Variabelsubstitution

2.3.1 Sats 6.4.6 (s.261)

Låt

$$\begin{cases} x &= g(u, v) \\ y &= h(u, v) \end{cases}$$

vara en bijektiv C^1 -avbildning av det öppna, begränsade och kvadrerbara området E i uv -planet på ett motsvarande område D i xy -planet sådan att $J(u, v) = \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \neq 0$. Då är

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| du dv,$$

förutsatt att integranderna är integrerbara.

2.3.2 Observationer vid variabelsubstitution

- Glöm inte att översätta gränserna vid variabelsubstitution.
- Försök att uttrycka (x, y) i (u, v) . Då kan man enkelt beräkna $J(u, v)$ och sedan slutföra transformationen.
- Observera slutligen att om det är mer fördelaktigt att uttrycka (u, v) i (x, y) så kan vi använda oss av att funktionaldeterminanten kan skrivas på följande sätt: $J(x, y) = 1/J(u, v)$.

3 Föreläsning 3

3.1 Integration med hjälp av nivåkurvor

Ytterligare en teknik för att beräkna dubbelintegraler, denna baserad på användningen av areor och nivåkurvor, uppkommer under förhållanden där vissa specifika krav uppfylls. Denna situation summeras i följande sats.

3.1.1 Ekv. 27 (s.271) given som sats

Låt $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion av klass C^1 , $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en funktion av klass C^0 , och $D \subset \mathbb{R}^2$ vara en kompakt, kvadrerbar mängd. Antag att $a \leq g(x, y) \leq b$ $\forall (x, y) \in D$. Låt även

$$A(u) = \mu(\{(x, y) \mid (x, y) \in D \wedge g(x, y) \leq u\}), \quad (10)$$

där μ representerar områdets area. Då gäller:

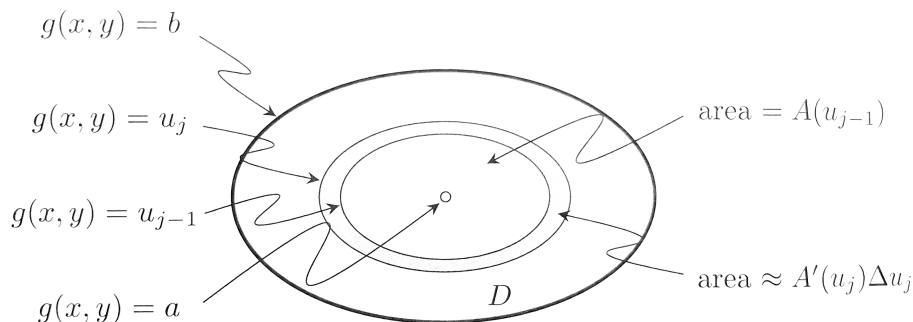
$$\iint_D h(g(x, y)) dx dy = \int_a^b h(u) A'(u) du. \quad (11)$$

3.1.2 Observationer vid integration med hjälp av nivåkurvor

- Satsen kräver att integranden har den specifika formen $h(g(x, y))$.
- Satsen kräver att vi kan beräkna arean $A(u)$ explicit samt formulera och beräkna $A'(u)$.
- Tekniken liknar till en grad den teknik som bygger på Fubinis sats fast där man skär längs nivåkurvor istället.

3.1.3 Visualisering och grunder för metoden

För att få en tydlig bild av vad satsen bygger på är det hjälpsamt att konstruera en visuell uppfattning av den.

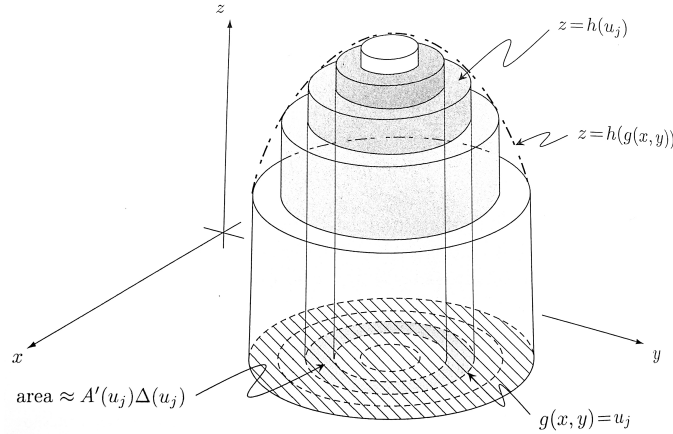


Figur 1: Visuell representation av grunderna för satsen. En avgörande egenskap för denna visualisering samt för satsen är att integranden är konstant till nivåkurvan på g .

Vi ser här en exempelrepresentation av området D med olika värden på funktionerna g och A utpekade. Vi ser att u_{j-1} och u_j representerar två på varandra följande värden av $g(x, y)$, samt att a och b representerar de inre respektive yttre gränserna för D och då samtidigt de undre och övre gränserna till g . Om vi antar att

$$a = u_0 < u_1 < \dots < u_n = b \quad (12)$$

är en *fin* indelning av intervallet $[a, b]$ kan vi beskriva avståndet mellan u_{j-1} och u_j som *infinitesimalt* litet. Detta låter oss i sin tur approximera $h(g(x, y)) \approx h(u_j)$ samt $area \approx A'(u_j)\Delta(u_j)$. Med denna information kan vi då göra följande överslagsräkning som slutför visualiseringen:



Figur 2: Visuell representation av beräkning av dubbelintegral med hjälp av nivåkurvor.

$$I \approx \sum_{j=1}^n h(u_j)(A(u_j) - A(u_{j-1})) \approx \sum_{j=1}^n h(u_j)A'(u_j)(u_j - u_{j-1}) \approx \int_a^b h(u)A'(u)du.$$

På så sätt kommer vi alltså tillbaka till metodens representation i satsen.

Vi ser även här att för att praktiskt kunna använda denna beräkningsteknik är det viktigt att areafunktionen $A(u)$ lätt går att beräkna. Detta gör att metoden bara kan användas i speciella fall.

3.2 Generaliserade dubbelintegraler

Alla dubbelintegraler vi hittills har studerat kräver att integrationsområdet och integranden är begränsade. Nedan förklaras hur dubbelintegraler kan utvidgas till obegränsade områden och funktioner. Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion, där $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är ett öppet område. Dubbelintegralen

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

kallas generaliserad om integrationsområdet D är obegränsat eller om integranden f är obegränsad på D . Notera att det är möjligt att både f och D är obegränsade.

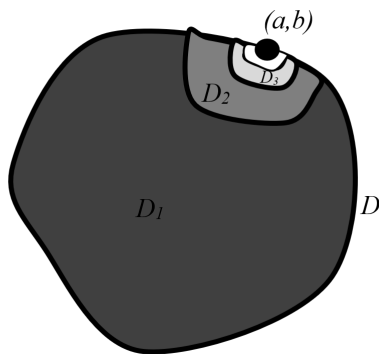
3.2.1 Uttömmande svit

Generaliserade dubbelintegraler kan hanteras genom att skapa en så kallad uttömmande svit $(D_n)_1^\infty$ till D . Det är en följd av områden som uppfyller att

$$D_n \subseteq D_{n+1} \text{ och } D_n \rightarrow D \text{ då } n \rightarrow \infty.$$

Varje område D_n är en kvadrerbar begränsad delmängd till D i vilken punkter där f är obegränsad, har avlägsnats. Genom denna avskärning erhålls alltså ett område där f är integrerbar.

Om f är obegränsad i en punkt (a, b) kan den uttömmande sviten intuitivt erhållas genom att skära bort allt mindre delar av D kring (a, b) . Om D är obegränsat kan D_n beskrivas som allt större begränsade delar av D . Det första fallet illustreras i figur 3.



Figur 3: Uttömmande svit till D där f är obegränsad i punkten (a, b) .

3.2.2 Integrandens tecken

Om $f(x, y) \geq 0 \forall (x, y) \in D$ påverkas integralens värde inte av hur D_n väljs. Den generaliserade dubbelintegralen definieras då som

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy.$$

Om f växlar tecken kan det erhållna gränsvärdet påverkas av formen på områdena D_n , och kan därför inte entydigt definieras på samma sätt som för ickenegativa integrander. Därför behöver funktionen delas upp i olika delar där dess tecken är fixt. Vi inför därför de ickenegativa funktionerna

$$f^+(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{då } f(x, y) \geq 0 \\ 0 & \text{då } f(x, y) < 0 \end{cases} \quad \text{och} \quad f^-(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{då } f(x, y) \geq 0 \\ -f(x, y) & \text{då } f(x, y) < 0 \end{cases}$$

som uppfyller att $f = f^+ - f^-$. Den ursprungliga integralen är konvergent om både

$$\iint_D f^+(x, y) dx dy \quad \text{och} \quad \iint_D f^-(x, y) dx dy$$

är konvergenta. Om så är fallet blir

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f^+(x, y) dx dy - \iint_D f^-(x, y) dx dy.$$

3.2.3 Praktisk räkning

Vid beräkning av generaliserade dubbelintegraler måste inte uttömmande sviter beaktas. Om $f(x, y) \geq 0 \forall (x, y) \in D$ kan vi nämligen använda samma tekniker som då både f och D är begränsade. Vid beräkning av generaliserade integraler med ickenegativ integrand kan alltså inspektion, Fubinis sats, variabelbyten och metoden med nivåkurvor utnyttjas. Om f växlar tecken behöver vi dock skapa de ickenegativa funktionerna f^+ och f^- innan detta kan göras.

4 Föreläsning 4

4.1 Dubbelintegral över axelparallel rektangel

Definition: En ändlig följd $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ kallas en partition av intervallet $[a, b]$. Vidare utgörs en partition av n delintervall $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$. En axelparallel rektangel kan uttryckas

$$\Delta = [a, b] \times [c, d] \quad (13)$$

med partitioner

$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \\ c &= y_0 < y_1 < \dots < y_n = d. \end{aligned} \quad (14)$$

Detta ger en partition av Δ där en delrektangel i Δ är

$$\begin{aligned} [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \\ i &= 0, \dots, n-1 \\ j &= 0, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (15)$$

Definition: Låt

$$\Delta = [a, b] \times [c, d] \quad (16)$$

och

$$\Phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}. \quad (17)$$

Φ kallas trappfunktion om det finns en partition så att Φ har ett konstant värde C_{ij} på $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$.

Definition: Dubbelintegralen av trappfunktionen Φ definieras som

$$\iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} C_{ij} (x_{i+1} - x_i) (y_{j+1} - y_j). \quad (18)$$

Det finns många partitioner som representerar samma funktion och som ger samma värde.

4.1.1 Definition 6.1.1 och 6.1.2

Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ vara en axelparallel rektangel och $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ en begränsad funktion. f är Riemannintegrerbar över Δ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns trappfunktioner $\Phi_\varepsilon, \Psi_\varepsilon$ på Δ så att

$$\Phi_\varepsilon(x, y) \leq f(x, y) \leq \Psi_\varepsilon(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Delta \text{ och} \quad (19)$$

$$\iint_{\Delta} \Phi_\varepsilon(x, y) dx dy - \iint_{\Delta} \Psi_\varepsilon(x, y) dx dy < \varepsilon. \quad (20)$$

Då definieras dubbelintegralen av f över Δ som

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\Delta} \Phi_\varepsilon(x, y) dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\Delta} \Psi_\varepsilon(x, y) dx dy. \quad (21)$$

Detta kan förklaras som att f är integrerbar om den kan klämmas mellan två trappfunktioner vars gränsvärde då ε går mot 0. Detta medför att dubbelintegralen av f är lika med gränsvärdet av trappfunktionerna.

4.1.2 Huvudsats 6.1.2 och 6.1.3

Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ vara en axelparallel rektangel och $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ en kontinuerlig funktion. Då gäller

- (i) f är integrerbar över Δ .
- (ii) både $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$ och $\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$ existerar.
- (iii) Fubinis sats: $\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$.

4.2 Bevis för integrerbarhet över rektangel

Beviset för integrerbarhet över en rektangel bygger på att konstruera begränsade trappfunktioner sådana att de tillsammans innesluter grafen på det område grafens funktion ska integreras över. Det fullföljs genom att använda definitionen av en Riemannintegrerbar funktion för att inse att skillnaden mellan de trappfunktioner som skapats närmar sig noll då de konstrueras av en allt finare partition.

Låt $\varepsilon < 0$.

Trappfunktioner Φ_ε och Ψ_ε ska nu hittas enligt dess definition. Eftersom funktionen $f \in C^0(\Delta)$ och Δ är kompakt innebär det också att f är likformigt kontinuerlig på Δ . Det innebär att

$$\exists \delta > 0 \text{ s.a. } \forall \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \Delta \text{ gäller } \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| < \delta \Rightarrow |f(\bar{x}_1) - f(\bar{x}_2)| < \frac{\varepsilon}{\mu(\Delta)}. \quad (22)$$

Nu väljs en partition sådan att diametern av varje rektangel i Δ är mindre det δ som antagits existera. Partitionen ser ut som följer:

$$R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]. \quad (23)$$

R_{ij} är en rektangulär mängd vars diameter ska vara $< \delta$. Eftersom f är kontinuerlig och R_{ij} är kompakt kommer f enligt satsen om största och minsta värde att anta både sitt största och minsta värde i den lilla rektangeln R_{ij} . Av den anledningen kan vi låta två tal M_{ij} och m_{ij} vara maximi- respektive minimivärdet i varje liten rektangel R_{ij} . Den volym som fås av att multiplicera arean $\mu(\Delta)$ med höjden (skillnaden mellan M_{ij} och m_{ij}) kommer att innesluta ytan som i R_{ij} beskrivs av funktionen f . Om vi kan begränsa denna volym med vårt ε är beviset klart. För att göra detta måste vi först säga att vår partition leder till att

$$M_{ij} - m_{ij} < \frac{\varepsilon}{\mu(\Delta)}. \quad (24)$$

Vi kan nu definiera trappfunktionerna Φ_ε och Ψ_ε så att $\Psi_\varepsilon(\bar{x}) = M_{ij}$ och $\Phi_\varepsilon(\bar{x}) = m_{ij}$ på $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$. Anledningen till att mjuka parenteser används är att inte rektanglarnas kanter ska överlappa varandra och därmed rubba entydigheten hos funktionsvärdena längs med kanten. I enighet med ekvation (21) kan det nu antas att

$$\Phi_\varepsilon(\bar{x}) \leq f(\bar{x}) \leq \Psi_\varepsilon(\bar{x}) \forall \bar{x} \in \Delta. \quad (25)$$

Nu kan integralerna av Φ_ε och Ψ_ε integreras med hjälp av definitionen för Riemannintegrerbarhet som presenteras i ekvation (20). Därefter kan deras skillnad begränsas av det godtyckliga ε som valts. Enligt ovanstående argument gäller olikheten nedan.

$$\begin{aligned}
\iint_{\Delta} \Psi_{\varepsilon} dx dy - \iint_{\Delta} \Phi_{\varepsilon} dx dy &= \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} M_{ij} (x_{i+1} - x_i) (y_{i+1} - y_i) - \\
&- \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} m_{ij} (x_{i+1} - x_i) (y_{i+1} - y_i) = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} (M_{ij} - m_{ij}) (x_{i+1} - x_i) (y_{i+1} - y_i) < \\
&< \frac{\varepsilon}{\mu(\Delta)} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} (x_{i+1} - x_i) (y_{i+1} - y_i) = \\
&= \frac{\varepsilon}{\mu(\Delta)} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \sum_{j=0}^{m-1} (y_{i+1} - y_i) = \\
&= \frac{\varepsilon}{\mu(\Delta)} (x_n - x_0) (y_n - y_0) = \\
&= \frac{\varepsilon}{\mu(\Delta)} (b - a) (d - c) = \\
&= \frac{\varepsilon}{\mu(\Delta)} \cdot [a, b] \times [c, d] = \\
&= \frac{\varepsilon}{\mu(\Delta)} \cdot \mu(\Delta) = \varepsilon
\end{aligned}$$

Summorna över n och m kan delas upp eftersom de summerar x respektive y separat. Då ε går mot noll innebär det att skillnaden mellan trappfunktionernas värde går mot noll. Eftersom f enligt olikheten (27) är instängd mellan trappfunktionerna Φ_{ε} och Ψ_{ε} kommer integralen f över Δ kunna definieras av antingen Φ_{ε} eller Ψ_{ε} .

□