

Dubbelintegraler

Cassandra Svanbro
Emil Andréasson
Martin Stjernkvist
Alexander Bohlin
Omar Booshi
Konrad Bernhold Jensen

Februari 2022

1 Dubbelintegraler

I envariabelfallet kan en integral användas för att hitta arean för en plan figur. På liknande sätt kan en dubbelintegral i två variabler användas för att hitta volymen av en tredimensionell kropp. För att kunna använda funktioner ser vi främst på kroppar som ligger mellan ett område D i xy -planet och en funktionsyta $z = f(x, y)$. För att praktiskt kunna beräkna dessa finns ett antal tekniker som beskrivs nedan.

1.1 Teknik A - Inspektion

- Utnyttja att dubbelintegraler beskriver volym med tecken.
- Utnyttja symmetri
- Utnyttja linearitet

Några viktiga iakttagelser:

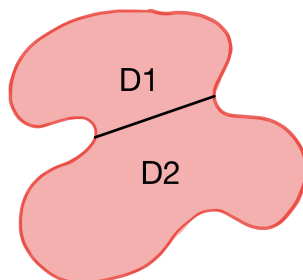
(I) Integralen är en linjär operation och kan delas upp enligt

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx \quad (1)$$

samt

$$\iint_D (\alpha f + \beta g) dx dy = \alpha \iint_D f dx dy + \beta \iint_D g dx dy. \quad (2)$$

(II) Dela upp området. $D = D_1 \cup D_2$ och $D_1 \cap D_2$ nollmängd.



Figur 1: Ett exempel på hur ett område kan delas upp i delområden.

Integralen över D kan då skrivas om som

$$\iint_D f dx dy = \iint_{D_1} f dx dy + \iint_{D_2} f dx dy. \quad (3)$$

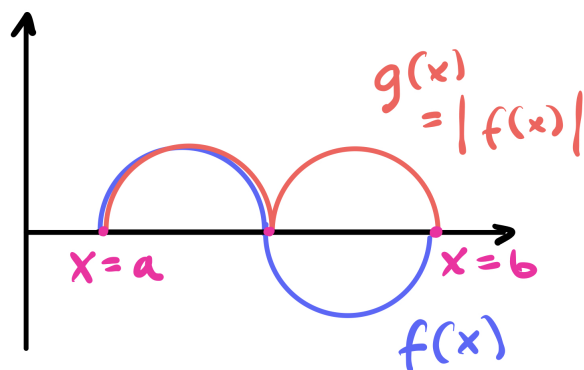
(III) Funktionen f på $a \leq x \leq b$ i $\mathbb{R}$ har medelvärde:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (4)$$

På samma sätt har funktionen f på D , där $\mu(D)$ är arean av D , medelvärdet:

$$\frac{1}{\mu(D)} \iint_D f dx dy. \quad (5)$$

1.1.1 Exempel A - Enkelintegral



Figur 2: Ett exempel på en funktion i en variabel där symmetri lämpar sig som teknik vid uträkning.

Från figur 1.1.2 kan det från symmetrin ses att:

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \quad (6)$$

och

$$\int_a^b g(x)dx = 2 \int_a^b f(x)dx. \quad (7)$$

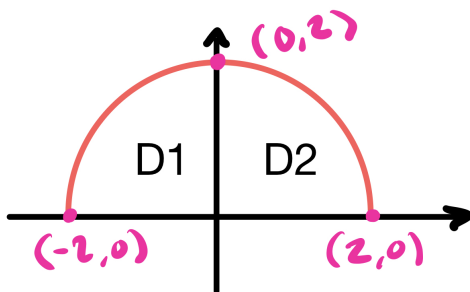
1.1.2 Exempel A - Dubbelintegral

Om vi vill beräkna

$$\iint_D (2x + 3)dx dy, \quad (8)$$

där

$$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}. \quad (9)$$



Figur 3: Illustration av området D från ekvation 9.

Om teknikerna från avsnitt 1.1 används på integralen från ekvation 8 ges att

$$\begin{aligned} \iint_D (2x + 3)dx dy &= \{\text{linearitet}\} \\ &= 2 \iint_D x dx dy + 3 \iint_D 1 dx dy \end{aligned} \quad (10)$$

och

$$\begin{aligned} \iint_D x dx dy &= \iint_{D1} x dx dy + \iint_{D2} x dx dy = 0 \\ \iint_D 1 dx dy &= 1\mu(D) = \frac{1}{2}\pi 2^2 = 2\pi. \end{aligned} \quad (11)$$

Ekvation 10 och 11 ger tillsammans att

$$\iint_D (2x + 3)dx dy = 6\pi. \quad (12)$$

1.2 Teknik B - Fubinis sats

Fubinis sats innebär beräkning av två itererande envariabel integraler. Detta går att göra för områden som är axelparallela rektanglar men även mer komplicera områden.

1.2.1 Fubinis sats för axelparallela rektanglar

Låt $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sådana att $a \leq b, c \leq d$. Då utgör mängden

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \quad (13)$$

en axelparallell rektangel i planet.

Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ axelparallell rektangel och $f : \Delta \mapsto \mathbb{R}$ kontinuerlig, då gäller att

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx. \quad (14)$$

1.2.2 Steg II Fubinis sats för reguljära områden

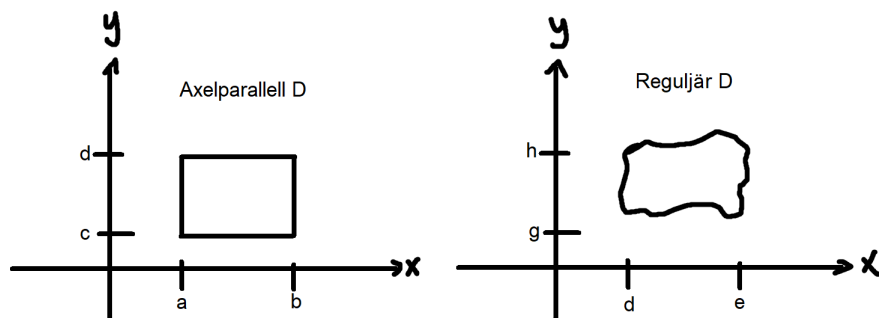
Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara kompakt. Där $\alpha_i, \beta_i \in C^1$ och $\alpha_i(x) \leq \beta_i(x) \forall x \in [a_i, b_i]$. D sägs vara **Reguljärt** i x -led om D kan delas upp i ändligt många delområden $D_i \mapsto D_m$, där D_i har formen

$$D_i = \{(x, y) : a_i \leq x \leq b_i, \alpha_i(x) \leq y \leq \beta_i(x)\}. \quad (15)$$

Om D är reguljärt ges då integralens värde av summan för integralerna av alla delområden D_i . Integralen för ett sådant område kan enligt Fubinis sats skrivas som

$$\iint_{D_i} f(x, y) dx dy = \int_{a_i}^{b_i} \int_{\alpha_i(x)}^{\beta_i(x)} f(x, y) dy dx. \quad (16)$$

Metoden för integration med hjälp av Fubinis sats för reguljära områden skiljer sig från integration för axelparallela områden i att värdena för x och y inte är konstanta, utan ändras när man går längs axlarna, som demonstrerat i nedanstående bild:



Figur 4: xy -plan med olika D (ses uppifrån).

När man väl använder Fubinis sats för reguljära områden kommer då de inre integralgränserna att innehålla variabeln som den yttre integranden har.

1.3 Teknik C - Variabelbyten

Varibalebyten kan användas för att simplificera beräkningar av integraler, vilket även i vissa fall kan vara nödvändigt för att integralen ska vara lösbar.

1.3.1 Variabelbyte i en variabel

I envariabelfallet utgör variabelbyte av en monoton funktion avbildar ett intervall $J = [\alpha, \beta]$ på reella axeln på ett annat intervall $I = [a, b]$. Om vi sätter $x = g(t)$ får vi då

$$\int_a^b f(x) dx = \pm \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t) dt. \quad (17)$$

Tecknet på integralen med nya variabler beror på huruvida g är växande eller avtagande. Detta kommer från att $g(\alpha) = a$ och $g(\beta) = b$ då g är växande, medan $g(\alpha) = b$ och $g(\beta) = a$ då g är avtagande. Minustecknet hör alltså till fallet då $g'(t) \leq 0$. Man kan därför även skriva mer generellt som

$$\int_I f(x) dx = \int_J f(g(t)) |g'(t)| dt. \quad (18)$$

1.3.2 Variabelbyten i planet

Ett variabelbyte i två variabler motsvarar en bijektiv avbildning enligt

$$\begin{cases} x = g(u, v) \\ y = h(u, v) \end{cases} \quad (19)$$

från ett område E i uv -planet till ett annat område D i xy -planet, där E och D är öppna, begränsade och kvadrerbara. Vi antar även att g och h är C^1 -funktioner. För att hitta hur man kan uttrycka

$$\iint_D f(x, y) dx dy \quad (20)$$

som en dubbelintegral av variablerna u och v över området E kan man utnyttja tolkningen av en integral som en tolkning av ett gränsvärde av en Riemannsumma. Att dela upp D i småbitar D_k motsvarar en uppdelning av E i E_k , där (u_k, v_k) är en punkt i E_k och $(x_k, y_k) = (g(u_k, v_k), h(u_k, v_k))$ är samma punkt i D_k . Areaförstoringen av avbildningen ges av beloppet av funktionsdeterminantens värde i punkten (u_k, v_k) . För areorna D_k och E_k är detta $\mu(D_k) \approx |J(u_k, v_k)| \mu(E_k)$, vilket ger

$$\sum_k f(x_k, y_k) \mu(D_k) \approx \sum_k f(g(u_k, v_k), h(u_k, v_k)) |J(u_k, v_k)| \mu(E_k), \quad (21)$$

där vänsterledet är en Riemannsumma för

$$\iint_E f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| du dv. \quad (22)$$

Då finhet ökar leder detta till likheten

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| du dv, \quad (23)$$

förutsatt $J(u, v) = \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \neq 0$ och att funktionerna är integrerbara över respektive område. Detta är det generella uttrycket för variabelbyten i planet.

1.4 Teknik D - Nivåkurvor

Vi skall utveckla en metod för att beräkna integraler av den speciella formen

$$I = \iint_D h(g(x, y)) dx dy, \quad (24)$$

där $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ är en kontinuerlig funktion av EN variabel, $D \subset \mathbb{R}^2$ kompakt, kvadrerbar mängd i xy -planet, $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ är en C^1 -funktion definierad i en mängd som omfattar D . Integranden är konstant på nivåkurvorna till g , och detta är en avgörande egenskap. Antag att $a \leq g(x, y) \leq b \forall (x, y) \in D$ Låt $A(u) = \mu(\{(x, y) \in D \mid g(x, y) \leq u\})$ och $u \in R$, då gäller:

$$\iint_D h(g(x, y)) dx dy = \int_a^b h(u) A'(u) du. \quad (25)$$

Därmed har beräkningen av dubbelintegralen (24) återförts på beräkning av en enda enkelintegral.

Observationer:

(I) Kräver att integranden har speciell form.

(II) Kräver att vi kan beräkna $A(u)$ explicit och $A'(u)$.

(III) Ungefär som Fubini men slicea längs nivåkurvor istället.

1.5 Generaliserade dubbelintegraler

En dubbelintegral över D

$$\iint_D f(x, y) dx dy, \quad (26)$$

kallas generaliserad om D är begränsad och f obegränsad eller om f är begränsad och D är obegränsad (Det kan också finnas fall där båda är obegränsade). Det hanteras genom att skapa en följd $D_n \subseteq D_{n+1}$ så $D_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} D$. I första fallet skapas D_n genom att skära bort mindre och mindre delar av D kring en punkt där f är obegränsad. I andra fallet tas istället större och större begränsade delar av D med. Detta kan bli problematiskt om f byter tecken och f får i sådana fall delas upp i två funktioner

$$f^+(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{då } f(x, y) \geq 0 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases} \quad (27)$$

och

$$f^-(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{då } f(x, y) \geq 0 \\ -f(x, y) & \text{annars.} \end{cases} \quad (28)$$

där $f = f^+ - f^-$. Då är båda positiva och kan integreras var för sig. Oftast kan dock Fubinis sats och de vanliga reglerna för generaliserade integraler användas för att beräkna dem.

1.6 Definition 6.1.1 och 6.1.2

Låt $\Delta = [a, b] \times [b, d]$ axelparallell rektangel och $f : \Delta \mapsto \mathbb{R}$ begränsad funktion. f sägs vara (Riemann) integrerbar över Δ om det för varje $\epsilon > 0$ finns trappfunktioner $\Psi_\epsilon, \Phi_\epsilon$ på Δ sådan att

$$(i) : \Phi_\epsilon(x, y) \leq f(x, y) \leq \Psi_\epsilon(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Delta \quad (29)$$

och

$$(ii) : \iint_{\Delta} \Psi(x, y) dx dy - \iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy < \epsilon. \quad (30)$$

I så fall defineras dubbelintegralen av f över Δ som

$$\iint_{\Delta} f dx dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{\Delta} \Psi_\epsilon dx dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{\Delta} \Phi_\epsilon dx dy. \quad (31)$$

1.7 Huvudsats (sats 6.1.2 6.1.3)

Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ axelparallell rektangel och $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^0$. Då gäller

- (i) Att f är integrerbar över Δ .
- (ii) Att både $\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$, och $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$ existerar.
- (iii) Att vi kan överföra en dubbelintegral på två enkelintegraler enligt:
 $\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$

1.8 Definition 6.2.3

Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ begränsad, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ begränsad. Låt Δ vara axelparallell rektangel $D \subseteq \Delta$.

$$f_D(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}) & \text{om } \bar{x} \in D \\ 0 & \text{annars.} \end{cases} \quad (32)$$

Satsen säger då att

$$\iint_D f dx dy = \iint_{\Delta} f_D dx dy \quad (33)$$

om integralen existerar.