

Sammanfattning av föreläsningar MVE035 Flervariabelanalys LV3

Hanna Andersson, Joakim Colpier, Hampus Gustafsson,
Anton Nordbeck, David Ruin och Nils Strömö

4 februari 2022

Innehåll

1	Introduktion, Inspektion och Definition	3
1.1	Inspektion	3
1.2	Reguljära områden	3
2	Fubinis sats	4
3	Variabelbyte	4
4	Nivåkurvor	5
4.1	Sats	5
4.2	Exempel	6
5	Riemannintegraler	6
5.1	Trappfunktioner	6
5.2	Definition	6
6	Generaliserad integral	7
6.1	Definition	7
6.2	Metoder för att hantera generaliserade integraler	7
6.3	Växlande tecken	8

1 Introduktion, Inspektion och Definition

Vi kommer att redogöra för hur man löser dubbelintegraler över fixt område. Liksom för derivator saknar integraler någon generalisering i flervariabelfallet. Teknikerna för att lösa integraler skiljer sig även från det endimensionella fallet, varav vi kommer att ta upp 5:

- (A) Inspektion
- (B) Fubinis sats
- (C) Variabelbyten
- (D) Nivåkurvor
- (E) Generaliserad integral

1.1 Inspektion

Kan dela upp området D s.a. $D = D_1 \cup D_2$, där en relation mellan D_1 och D_2 redan är given, och på så sätt undviker onödigt arbete.

Exempel. Beräkna $\iint_D f(x, y) dx dy$, där f är en udda funktion och D symmetrisk i $(0, 0)$ m.a.p. x .

Lösning: Då kan vi dela upp D i de två delarna D_1, D_2 i linjen $x = 0$. Men vi inser då att $\iint_{D_1} f(x, y) dx dy = -\iint_{D_2} f(x, y) dx dy$, och därmed $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy = 0$.

Genom inspektion kan vi alltså bestämma integraler utan att beräkna dem, vilket i värsta fall vinner lite tid, i bästa fall löser en annars obestämbar integral.

1.2 Reguljära områden

Definition. Låt $D \subset \mathbb{R}^2$ vara en kompakt mängd.

D sägs vara **reguljär i x -led** om D kan delas upp i ändligt många delområden $D_1, \dots, D_n$, där $D_i = \{(x, y) | a_i \leq x \leq b_i, \alpha_i(x) \leq y \leq \beta_i(x)\}$, $\alpha_i, \beta_i \in C^1$ och $\alpha_i(x) \leq \beta_i(x) \forall x \in [a_i, b_i]$.

Reguljär i y -led med analog definition.

D sägs vara **reguljär** om den är reguljär i både x - och y -led.

Exempel. En rektangel är reguljär, medan en fraktal inte är det.

2 Fubinis sats

Låt f vara en integrerbar funktion i två variabler över ett område

$$\Delta = (x, y); a \leq x \leq b, c \leq y \leq d = [a, b] \times [c, d], \quad (1)$$

vilket kallas för en axelparallell rektangel, samt

$$f : \Delta \Rightarrow \mathbb{R}. \quad (2)$$

Då gäller,

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy, \quad (3)$$

där den oberoende variabeln betraktas som konstant. Det går att byta plats på variablerna utan att detta får någon konsekvens för resultatet. Det är dock viktigt att även byta plats på gränserna, det vill säga c, d och a, b . Att integrera på det här sättet kan göra räkneoperationerna enklare. Om den första integralen väljs väl kan ett uttryck bli mycket lättare att integrera. Att ha i åtanke är dock att ett uttryck kan vara lätt att integrera från ett håll, men svårt från ett annat.

Geometriskt går det att tolka detta i form av att den första integranden skapar en basarea i en cylinder. Den senare integranden blir sedan höjden på cylindern. Tillsammans bildar sedan basarean och höjden en volym.

3 Variabelbyte

Vid variabelsubstitution för dubbelintegralen

$$\iint_D f(x, y) dx dy \quad (4)$$

sätts

$$\begin{cases} x = g(u, v) \\ y = h(u, v) \end{cases} \quad (5)$$

där h och g både är av klass C^1 .

Ett variabelbyte mellan (x, y) och (u, v) kommer innebära en linjäravbildning från ett område E i uv -planet till området D i xy -planet. Vid en linjär avbildning kommer ett områdes areaförändring vara lika stor som absolutbeloppet av avbildningens determinant. Enligt det gjorda variabelbytet i ekvation (5) kan en punkt (x_i, y_i) i D också skrivas som den motsvarande punkten i E :

$$(x_i, y_i) = (g(u_i, v_i), h(u_i, v_i)). \quad (6)$$

Genom att approximera en yta nära punkten (x_i, y_i) kan man få fram att avbildningsmatrisen för avbildningen är funktionalmatrisen. Determinanten för funktionalmatrisen är per definition Jacobian determinanten.

Varje litet område av E motsvarar ett litet område i D och eftersom areaförstoringen är lika med absolutbeloppet av dess determinant får vi att sambandet mellan ett litet område E_i och D_i kan därför sägas vara

$$\mu(D_i) \approx \left| \frac{d(g, h)}{d(u_i, v_i)} \right| \mu(E_i). \quad (7)$$

Detta ger att

$$\sum_i f(x_i, y_i) \mu(D_i) \approx \sum_i f(g(u_i, v_i), h(u_i, v_i)) \left| \frac{d(g, h)}{d(u_i, v_i)} \right| \mu(E_i). \quad (8)$$

Både vänsterledet och högerledet i ekvation (8) är Riemannsummor. Om areorna görs godtyckligt små fås därför sambandet

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_E f(g(u, v), h(u, v)) \left| \frac{d(g, h)}{d(u, v)} \right| du dv. \quad (9)$$

4 Nivåkurvor

4.1 Sats

Låt $g : \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}$ vara C^1 , $h : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ vara C^0 och $D \subset \mathbb{R}^2$, kompakt och kvadrerbar mängd.

Antag att $a \leq g(x, y) \leq b \, \forall (x, y) \in D$

Låt då $A(u)$, vara arean av D_u .

$D_u = \{(x, y) \in D : 0 \leq g(x, y) \leq u\}$

Då gäller

$$\iint_D h(g(x, y)) \, dx dy = \int_a^b h(u) A'(u) \, du.$$

4.2 Exempel

Beräkna

$$\iint_D \frac{dx dy}{(1 + (x + 2y)^2)^2}$$
$$D = (\{(x, y) \in D : 1 \leq x + 2y \leq 2\}).$$

Lösning

Vi använder satsen om nivåkurvor för att underlätta beräkningen av integralen.

Sätt

$$g(x, y) = x + 2y, \quad h(u) = \frac{1}{(1 + u^2)^2}.$$

Då blir arean av området D skillnaden av två trianglar,

$$A(u) = \frac{1}{2} \cdot \frac{u}{2} \cdot u - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$
$$A'(u) = \frac{u}{2}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{1}{(1 + u^2)^2} \cdot \frac{u}{2} du = \{w = 1 + u^2\} = \frac{3}{40}.$$

5 Riemannintegraler

5.1 Trappfunktioner

För att definiera riemannintegraler i flera dimensioner utgår man från trappfunktioner.

Definition: Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ och $\Phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$. Φ kallas för en trappfunktion om det finns partitionerna $a = x_0 \leq \dots \leq x_n = b$ och $c = y_0 \leq \dots \leq y_n = d$, sådana att Φ har ett konstant värde c_{ij} på $[x_i, x_{i+1}) \times [y_j, y_{j+1})$.

5.2 Definition

Genom att göra indelningen finare kan man få en bättre approximation av volymen av en figur i rummet. Då man gör partitionen godtyckligt fin så går arean av varje delrektangel mot noll.

Definition (6.1.1 och 6.1.2):

Låt $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ vara en axelparallell rektangel och $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ vara

en begränsad funktion. Funktionen f sägs vara (Riemann)integrerbar över Δ om det för varje $\epsilon > 0$ finns trappfunktionerna $\Phi_\epsilon, \Psi_\epsilon$ på Δ sådana att:

$$\Phi_\epsilon \leq f(x, y) \leq \Psi_\epsilon \forall (x, y) \in \Delta$$

$$\iint_{\Delta} dx dy - \iint_{\Delta} dx dy < \epsilon.$$

I så fall definieras dubbelintegralen av f över Δ och

$$\iint_{\Delta} f dx dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{\Delta} \Phi_\epsilon dx dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{\Delta} \Psi_\epsilon dx dy.$$

6 Generaliserad integral

Om man vill integrera obegränsade funktioner eller begränsade funktioner över ett obegränsat område räcker inte de metoder som vi tidigare har gått igenom. För att hantera sådana funktioner behöver vi istället generaliserade integraler.

6.1 Definition

Integralen $\int_D f(x, y) dx dy$ är generaliserad om

1. D är ett begränsat område men f är obegränsad på D eller
2. D är obegränsad.

6.2 Metoder för att hantera generaliserade integraler

För att hantera integraler av denna typ skapar vi en följd av områden $D_n \subseteq D_{n+1}$ så att $D_n \rightarrow D$ då $n \rightarrow \infty$. De olika fallen av generaliserade integraler hanteras sedan på olika sätt.

1. Vi genom att skära bort mindre och mindre bitar av D nära de punkter som $|f| \rightarrow \infty$.
2. Vi tar med större och större begränsade delar av D och låter $n \rightarrow \infty$.

6.3 Växlande tecken

Om f växlar tecken kan gränsvärdet bero på valet av D_n . Så vi måste anta att $f(x, y) \geq 0$. I sådana fall kan funktionen delas upp i positiv och en negativ del

$$f^+(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{om } f(x, y) \geq 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$
$$f^-(x, y) = \begin{cases} -f(x, y) & \text{om } f(x, y) < 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

där $f = f^+ - f^-$ och integrera var för sig själv.