

Tavelpresentation 5A

Andreas Kajler, Edvin Ketabati, Filip Wilhelmsson,
Folke Ishii, Magnus Claesson, Tobias Behrendtz

Februari 2022

1 F13: Dubbel- och Trippelintegraler

Definition 13.1 (Integral över begränsad mängd)

Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara en begränsad funktion och $D \subseteq \mathbb{R}^2$ en begränsad mängd. Vi täcker sedan D med en axelparallell rektangel Δ , d.v.s. $\Delta \supseteq D$. Låt oss nu definiera en utökad funktion f_D på följande vis

$$f_D(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{om } \mathbf{x} \in D \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Vi säger då att f är integrerbar över D om f_D är integrerbar över Δ , och vi sätter

$$\iint_D f \, dx dy = \iint_\Delta f_D \, dx dy.$$

Eftersom f_D är noll utanför D spelar valet av Δ ingen roll.

Lemma 13.1

Om f är likformigt kontinuerlig och begränsad på en kvadrerbar mängd D
 $\Rightarrow f$ integrerbar.

Trippelintegraler

Låt $D \subset \mathbb{R}^3$ vara ett kompakt kvadrerbart område. Volymen av området kan då skrivas som

$$\mu(D) = \iiint_D 1 \, dV,$$

där volymelementet $dV = dx dy dz$. Området D kan beskrivas som området mellan två funktioner

$$D = \{(x, y, z) | (x, y) \in E, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}.$$

Fubinis sats är applicerbar även på trippelintegraler. Man kan vid beräkning integrera en dubbelintegral över en enkelintegral eller tvärtom enligt

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\pi(D)} \left(\int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

Alternativt

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_{x=a}^b \left(\iint_D f(x, y, z) dy dz \right) dx.$$

2 F14: Multipelintegraler

För att behandla integraler till funktioner av fler än tre variabler börjar vi med att införa en ny notation. Om $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gäller

$$\int f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Låt oss nu betrakta specialfallen då integrationsdomänen för en multipelintegral är ett klot eller en sfär. Observera att en sfär inte är ett klot utan syftar på ytan av ett klot d.v.s. klotets rand. Vi använder oss av följande definition för ett n -dimensionellt klot med radie r :

$$B_{n,r} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \|\mathbf{x}\| \leq r\}.$$

Tag enhetsklotet, $r = 1$. Låt sedan $\mu_n = \mu(B_n) = \int_{B_n} 1 d\mathbf{x}$ beskriva klotets area. Då kan vi formulera följande sats:

Sats 14.1

Arean av ett n -dimensionellt enhetsklot ges av rekursionsformeln:

$$\mu_1 = 2, \mu_2 = \pi, \mu_n = \frac{2\pi}{n} \cdot \mu_{n-2} \quad \forall n \geq 3.$$

Lemma 14.1

För alla $r > 0$ ges klotets area av:

$$\mu(B_{n,r}) = \mu_n \cdot r^n.$$

Bevis av lemma 14.1

utför variabelbytet $\mathbf{x} = r \cdot \mathbf{y}$. Detta ger oss:

$$\frac{\partial(\mathbf{x})}{\partial(\mathbf{y})} = rI \Rightarrow \frac{d(\mathbf{x})}{d(\mathbf{y})} = r^n \Rightarrow \mu(B_{n,r}) = \int_{\|\mathbf{x}\| < r} d\mathbf{x} = \int_{\|\mathbf{y}\| < 1} r^n d\mathbf{y} = r^n \mu_n.$$

Definition 14.1

Gammafunktionen defineras enligt följande:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \cdot e^{-t} \quad z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Denna funktion har egenskaperna,

1. $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$.
2. $\Gamma(n+1) = n!$ för $n \geq 0$ heltal.
3. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Med hjälp av gammafunktionen kan vi nu beskriva även volymen av enhetsklotet i n -dimensioner där $n \geq 1$ enligt följande:

$$\mu_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$

För $n \geq 3$ sammanfattar den formeln till $\frac{2\pi}{n}$.

Om vi nu ska undersöka arean av en sfär i n -dimensioner istället för klot, låter vi sfären S^n ges av

$$S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Därefter beskriver vi volymförändring i sfären med $dV = A \, dr$ vilket motiverar

$$A_n = \text{ytarea}(S^{n-1}) = \frac{d}{dr}(\mu(B_{n,r})) = \frac{d}{dr}(\mu_n r^n).$$

Eftersom vi har tittat på enhetssfärer, utvärderar vi uttrycket i $r = 1$ och får $A_n = n \cdot \mu_n$.

Från detta följer att arean hos en $n-1$ dimensionell enhetssfär ges av:

$$A_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Masscentrum

Masscentrum är medelvärde av positionerna hos ett föremåls massa. Med densiteten som en funktion av positionen $\rho(x, y, z)$ ges koordinaterna av:

$$m_x = \frac{1}{M} \cdot \iiint_D x \rho(x, y, z) \, dx dy dz.$$

Där M är föremålets totala massa. Resterande koordinater, m_y och m_z beräknas på motsvarande sätt och ger tillsammans en Ortsvektor till föremålets masscentrum.

3 F15: Parametrisering av kurvor

Definition 15.1 (Parametriserad och orienterad kurva)

Låt $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ där $a \leq b$ och $t \mapsto \mathbf{r}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$. Då kallas $\mathbf{r}$ av klass C^k för en parametriserad och orienterad C^k -kurva.

Startpunkt och slutpunkt för kurvan är $\mathbf{r}(a)$ respektive $\mathbf{r}(b)$, om $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ kallas kurvan sluten.

Det är möjligt att en kurva korsar sig själv, men gör den inte det kallas den enkel. Att en kurva är enkel är ekvivalent med att följande gäller

$$a \leq t_1 < t_2 < b \Rightarrow \mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2).$$

Obs! Begreppet kurva innebär formellt en värdemängd och tar inte hänsyn till parametrisering eller orientering. Exempelvis är värdemängden av $\mathbf{r}(t)$ en kurva medan $\mathbf{r}(t)$ i sig inte är det.

Definition 15.2 (Orientering och orienteringsbyte)

Med orientering av en kurva menas det val av de två håll som det kan färdas med över kurvan. Om en funktion $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ersätts med en annan funktion $\mathbf{s} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ som båda är parametriseringar av samma kurva sker ett orienteringsbyte om det gäller att $\mathbf{s}(t) = \mathbf{r}(b + a - t)$ där $a \leq t \leq b$.

Definition 15.3 (Parametrisering och parametriseringsbyte)

En parametrisering av en kurva är en samling ekvationer beroende av ett visst antal parametrar som beskriver kurvan på ett visst intervall. Två C^k -funktioner $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{s} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ där $a \leq b$ och $c \leq d$ sägs vara parametriseringar av samma orienterade C^k -kurva om det existerar en växande och bijektiv funktion $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$, $\phi \in C^k$ så att

- (i) $\phi(a) = c$ och $\phi(b) = d$,
- (ii) ϕ är växande : $x_1 \leq x_2 \Rightarrow \phi(x_1) \leq \phi(x_2)$,
- (iii) $\mathbf{r}(t) = \mathbf{s}(\phi(t))$ för alla $t \in [a, b]$.

Fysikalisk tolkning av en parametriserad och orienterad kurva

Låt $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en C^1 -funktion och $t \in [a, b]$ där t är en tidsparameter. Då kan en fysikalisk tolkning av $\mathbf{r}(t)$ vara en partikels position vid tiden t som färdas i den relevanta kurvan från punkt $\mathbf{r}(a)$ till $\mathbf{r}(b)$. Vidare ges partikelns hastighet av $\mathbf{r}'(t)$ vid tiden t och dess fart av $\|\mathbf{r}'(t)\|$. Om det dessutom gäller att $\mathbf{r} \in C^2$ ges partikelns acceleration vid tiden t av $\mathbf{r}''(t)$.

Definition 15.4 (En kurvas längd)

Låt $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en C^1 -kurva där $t \in [a, b]$. Tangenten till kurvan med

samma riktning som kurvans orientering ges då av $\mathbf{r}'(t)$. På tiden dt rör sig partikeln $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)dt$ där längden av den tillryggelagda sträckan under tiden dt är $ds = \|d\mathbf{r}\| = \|\mathbf{r}'(t)\|dt$. Den totala längden av kurvan ges då av

$$L = \int_a^b ds = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

Sats 15.1

Längden av en C^1 -kurva beror ej på parametrisering eller orientering.

Bevis av sats 15.1

Låt $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ växande och bijektiv C^1 -funktion och $\mathbf{r}(t) = \mathbf{s}(\phi(t))$ där $a \leq t \leq b$.

Vi får då att längden av $\mathbf{s}(\phi(t))$ är lika stor som längden $L = \mathbf{r}(t)$ enligt följande uträkning

$$\begin{aligned} L^* &= \int_c^d \|\mathbf{s}(u)\| du = [u = \phi(t), du = \phi'(t)dt] = \\ &= \int_a^b \|\mathbf{s}'(\phi(t))\| \phi'(t) dt = [\phi'(t) > 0, \text{ ty } \phi(t) \text{ växande}] = \\ &= \int_a^b \|\mathbf{s}'(\phi(t))\phi'(t)\| dt = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt = L. \end{aligned}$$

Satsen är således bevisad.

Sats 15.2

Låt $\mathbf{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{v} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara C^1 -funktioner. Då gäller

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t). \quad (1)$$

Bevis av sats 15.2

Vi utvecklar vänsterledet i ekvationen 1 och erhåller

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)) &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n u_i(t) \cdot v_i(t) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (u_i(t) \cdot v_i(t)) = \\ &= \sum_{i=1}^n u_i'(t) \cdot v_i(t) + \sum_{i=1}^n u_i(t) \cdot v_i'(t) = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t). \end{aligned}$$

Vi har därmed bevisat satsen.

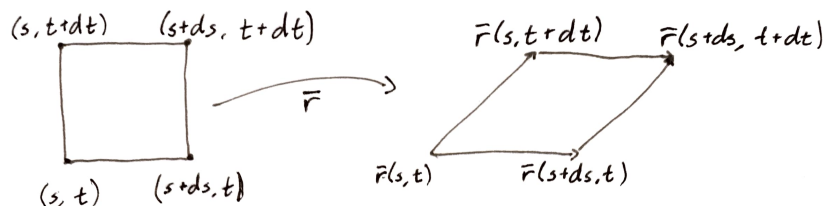
4 F16: Parametrisering av ytor

Definition 16.1 (Parametriserad yta)

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en kompakt kvadrerbar mängd. En C^k -funktion $\mathbf{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ kallas en parametriserad C^k -yta $\forall k \geq 0, n \geq 2$.

Notation: $\mathbf{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ skrivs $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$ eller $(s, t) \mapsto (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$.

För att beskriva en parametriserad yta studerar vi först en infinitesimal rektangel:



Figur 1: Funktionen $\vec{r}$ verkar på en infinitesimal rektangel.

Genom linjärisering av vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ får vi ett uttryck för den infinitesimala arean, som även kallas areaelementet:

$$dS = \left\| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) \right\|.$$

Genom att integrera detta areaelement över området D fås ytarean av en parametriserad C^1 -yta:

$$\iint_D dS = \iint_D \left\| \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) \right\| ds dt.$$

Det finns två specialfall av integralen som bör lyftas fram. Det första gäller då ytan utgörs av en funktionsgraf. Det vill säga ytan ges av $Y = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2, z(x, y)\}$ vilket leder till den naturliga parametriseringen $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$. För att beräkna arean av denna yta behöver vi de partiella derivatorna:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = (1, 0, f'_x), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = (0, 1, f'_y)$$

och kryssprodukten av dem

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = (-f'_x, -f'_y, 1)$$

vilket ger ytarean av funktionsgrafen

$$\iint_D \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1} \, dxdy. \quad (2)$$

Det andra specialfallet gäller för nivåytor till funktionen $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Det vill säga ytan ges av $Y = \{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = C, (x, y) \in D \in \mathbb{R}^2\}$. Om det existerar en nollskild partiell derivata så används den implicita funktionssatsen (IFS) med avseende på den variabeln. Antag exempelvis att $F'_z \neq 0$, då existerar det enligt IFS en funktion f sådan att:

$$z = f(x, y) \text{ och } f'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, f'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Med insättning av dessa partiella derivator i ekvation 2 får vi att ytarean beskrivs av:

$$\iint_{D=\pi(Y)} \sqrt{\frac{F'^2_x}{F'^2_z} + \frac{F'^2_y}{F'^2_z} + 1} \, dxdy = \iint_{D=\pi(Y)} \frac{\|\nabla F\|}{|F'_z|} \, dxdy.$$

Fysik tillämpning av skalärprodukt

Antag att en partikel med massa m följer en C^2 kurva $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Då blir förändringen av kinetisk energi:

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} (\|\mathbf{r}'(b)\|^2 - \|\mathbf{r}'(a)\|^2) &= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} \|\mathbf{r}'(t)\|^2 \, dt = \\ \frac{m}{2} \int_a^b 2\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt &= \int_a^b \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt. \end{aligned}$$

$\mathbf{F}(t)$ är den kraft som verkar på partikeln. Ofta beror $\mathbf{F}$ på positionen av partikeln, men ej av tiden. Därmed blir $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ett statiskt vektorfält. Detta ger oss en kurvintegral eller arbetsintegral där det arbete som kraften utför på partikeln är dess förändring i kinetisk energi.

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt.$$