

Tavelpresentation - Grupp 5D

Allan Vahlenberg Amir Tresnjic Aram Jamal
Filippa Hultin Marina Sahakyan William Forsberg

Februari 2022

1 Trippelintegraler, variabelbyten

1.1 Generaliserade integraler

f kan bero på beräkningsmetoden om f växlar tecken (är positiv ibland och negativ ibland).

På följande sätt kan vi dra slutsatser om f :

- Dela upp f i dess positiva och negativa områden.
- De negativa områdena: f^-
- De positiva områdena: f^+
- Tag $f^+ + f^-$ som är $= |f|$

Om $\iint |f| dx dy$ konvergent $\Leftrightarrow \iint_D f^+ dx dy$ och $\iint_D f^- dx dy$ konvergenta.

Om dubbelintegralen av en funktion $g \geq |f|$ på D är konvergent är även $\iint_D |f| dx dy$ konvergent.

1.2 Integral över begränsad mängd

1.2.1 Definition

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ begränsad, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ begränsad, $D \in \Delta$ axelparallell rektangel.

$$f_D(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}) & \text{om } \bar{x} \in D \text{ (detta kallas nollutvidgning)} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Då är:

$$\int_D f dx dy = \int_{\Delta} f_D dx dy \quad (1)$$

1.2.2 Integrerbarhet, lemma

Om D kvadrerbar mängd och f likformigt kontinuerlig och begränsad på D
 $\Rightarrow f$ integrerbar.

Låt Δ vara en axelparallell rektangel och $D \subseteq \Delta$. Dela upp Δ i många små fyrkanter.
Då gäller:

- På rutor i D : f är kontinuerlig på rektangel $\Rightarrow$ integrerbar.
- På rutor utanför D : Trappfunktioner = 0 ty $f = 0$ där.
- På randen: Total area $< \epsilon$ pga D kvadrerbar mängd (randen är nollmängd, saknar area.)

1.3 Trippelintegraler

Används vanligtvis för volymberäkningar.

Om $D \subseteq R^3$ kompakt, kvadrerbart område, så ges D 's volym på följande sätt:

$$\iiint_D 1 dx dy dz \quad (2)$$

$$dV = dx dy dz \quad (3)$$

1.3.1 D ett område mellan två funktioner

Om D är ett område mellan två funktioner, figuren är rak i z -led och begränsas av (x, y) -funktioner i båda ändarna går det att beräkna volymen på följande sätt (Kallas ibland Fubini 2+1):

$$\iint_E \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} 1 dz \right) dx dy \quad (4)$$

där $\beta(x, y)$ och $\alpha(x, y)$ är funktionerna z begränsas av och E är området av projektionen av figurens bredaste del på (x, y) -planet (detta för att alla x - och y -värden som är med i figuren ska inkluderas).

1.3.2 Alternativt sätt att beräkna en figurs volym

Det går även att göra vertikala snitt över D parallella med (x, y) -planet, och sedan ställa upp trippelintegralen på följande sätt:

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz \quad (5)$$

Här är D_z ytan av snittet vid höjd z . a och b är gränser i z -led.

1.4 Koordinatbyten

1.4.1 Cylinderkoordinater

Passande koordinatbyte vid beräkning av integralen över cylindriska former.

Variablerna i trippelintegralen blir, istället för x, y och z , ρ, φ och z .

Har vi en cylinder med raka sidan i z -led blir gränserna i leden följande:

- ρ -led: $0 \rightarrow r$ där r är radien på cirkeln.
- φ -led: $0 \rightarrow 2\pi$ (eftersom det är hela cirklar i ändarna)
- z -led: Samma som i tidigare z (eftersom cylindern är rak i z -led.)

Byt ut x, y och z respektive $dx dy dz$ i trippelintegralen på följande sätt.

$$(x, y, z) \rightarrow (\rho, \varphi, z) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos(\varphi) \\ y &= \rho \sin(\varphi) \\ z &= z \end{aligned} \quad (7)$$

$$dx dy dz = \rho d\rho d\varphi dz \quad (8)$$

För att koordinatbytet ska ge samma area behöver man multiplicera med Jacobianen, vilken är ρ i detta fall.

1.4.2 Sfäriska koordinater

Passande koordinatbyte vid beräkning av integralen över sfäriska former.

Variablerna i trippelintegralen blir, istället för x, y och z , r, θ och ϕ .

Har vi en sfär blir gränserna i leden följande:

- r -led: $0 \rightarrow R$ där R är längden på radien i sfären.
- θ -led: $0 \rightarrow \pi$ eftersom vi vill integrera hela sidan på sfären. θ är vinkeln mellan positiva z -axeln och vektorn (x, y, z)
- ϕ -led: $0 \rightarrow 2\pi$ eftersom vi vill integrera hela varvet runt. ϕ är vinkeln mellan positiva x -axeln och vektorn $(x, y, 0)$.

Byt ut x, y och z respektive $dx dy dz$ i trippelintegralen på följande sätt.

$$(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \phi) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} x &= r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ y &= r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z &= r \cos(\theta) \end{aligned} \quad (10)$$

$$dx dy dz = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi \quad (11)$$

För att koordinatbytet ska ge samma area behöver man multiplicera med Jacobianen, vilken är $r^2 \sin(\theta)$ i detta fall.

1.5 Multipelintegraler

För integraler i $\mathbb{R}^n$ använder man beteckningen

$$\int \dots \int_D f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

eller kortare

$$\int_D f(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Man definierar volymen $\mu(D)$ av ett kvadrerbart område D i $\mathbb{R}^n$ som

$$\mu(D) = \int_D 1 d\vec{x}.$$

Exempel: Låt B_n vara det n -dimensionella enhetsklotet och $\mu(B_n)$ beteckna dess volym. För bestämning av volymen av enhetsklotet B_n i $\mathbb{R}^n$ har vi rekursionsformeln

$$\begin{cases} \mu(B_1) = 2 \\ \mu(B_2) = \pi \\ \mu(B_n) = \frac{2\pi}{n}\mu(B_{n-2}), \quad n = 3, 4, \dots \end{cases}.$$

Låt $\mu_n = \mu(B_n) = \int_{B_n} 1 d\vec{x}$. För att bevisa rekursionsformeln kommer vi införa ett lemma.

Lemma: För $r > 0$, låt

$$B_{n,r} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\|^2 \leq r\} \quad (12)$$

Då är

$$\mu(B_{n,r}) = \mu_n r^n \quad (13)$$

Bevis av rekursionsformeln:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 2 \\ \mu_2 &= \pi \\ \mu_n &= \frac{2\pi}{n}\mu_{n-2} \end{aligned}$$

För n större eller lika med tre skriver vi:

$$1 \geq \|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \rightarrow x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq 1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2 \quad (14)$$

Fixerar vi högerledet så blir vänsterledet en två dimensionell cirkelskiva. Cirkelskivans area blir då $\pi(1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2)$. Projektionen av B_n på $x_1 \dots x_{n-2}$ planet blir B_{n-2} . Då kan volymen uttryckas som:

$$\mu_n = \int_{B_n} d\vec{x} = \int_{B_{n-2}} \pi \left(1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2 \right) dx_1 \dots dx_{n-2} \quad (15)$$

Integranden kan skrivas om. Låt $g(x_1 \dots x_{n-2}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-2} x_i^2}$ och $h(u) = 1 - u^2$. Då är $h(g(x_1 \dots x_{n-2})) = 1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2$ där $0 \leq g \leq 1$.

Integration med hjälp av nivåkurvor ger då:

$$\mu_n = \pi \int_0^1 h(u) V'(u) du \quad (16)$$

Där $V(u)$ är en $n-2$ dimensionell volym av $\{\vec{x} \in B_{n-2} | g(\vec{x}) \leq u\} = B_{n-2,u}$, dvs $n-2$ dimensionellt klot med radie u . Lemmat ger $v(u) = \mu_{n-2}u^{n-2}$.

$$\mu_n = \pi \int_0^1 (1-u^2) \frac{d}{du} (\mu_{n-2}u^{n-2}) du = \frac{2\pi}{n} \mu_{n-2} \quad (17)$$

Vilket skulle visas.

1.6 Tillämpningar av trippelintegraler

Om ett föremål med densitet $\rho = \rho(x, y, z)$ ockuperar ett kompakt kvadrerbart område $D \subseteq \mathbb{R}^3$ då ges dess totala **massa** av

$$M = \int \int \int_D \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

Medelvärdet av en funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ över $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ges av

$$\bar{f}_D = \frac{1}{\mu(D)} \int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz = \frac{\int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz}{\int \int \int_D 1 dx dy dz}.$$

Masscentrum är medelvärdet av positionerna av föremålets massa och ges av

$$\vec{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}, \quad m_x = \frac{1}{M} \int \int \int_D x \rho(x, y, z) dx dy dz \quad (m_y \text{ och } m_z \text{ på samma sätt}).$$

Exempel: Bestäm masscentrum för en homogen kropp D som begränsas av xy -planet och paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$.

Lösning: OBS! *Homogen* betyder konstant densitet och därför återstår det att bestämma masscentrum enligt

$$m_z = \frac{\int \int \int_D z dx dy dz}{\int \int \int_D dx dy dz}, \quad (m_x \text{ och } m_y \text{ på samma sätt}).$$

OBS! På grund av symmetrin ligger masscentrum på z -axeln som betyder att $m_x = 0$ och $m_y = 0$. För att bestämma m_z hanterar vi de två trippelintegralerna. Projektionen på xy -planet blir $\pi(D) = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$. Vi börjar med nämnaren:

$$\int \int \int_D dx dy dz = \int \int_{\pi(D)} \left(\int_{z=0}^{z=1-x^2-y^2} dz \right) dx dy = \int \int_{\pi(D)} (1 - x^2 - y^2) dx dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r^2)r dr d\theta = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Täljaren blir:

$$\begin{aligned} \int \int \int_D z dx dy dz &= \int \int_{\pi(D)} \left(\int_{z=0}^{z=1-x^2-y^2} z dz \right) dx dy = \frac{1}{2} \int \int_{\pi(D)} (1-x^2-y^2)^2 dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r^2)^2 r dr d\theta = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Vi får alltså

$$m_z = \frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Svar: Kroppens masscentrum är

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

2 Kurvor

Den första föreläsningen under läsvecka 5 introducerades studenten till kurvor. Detta avsnitt av flervariabelanalysen visar sig ha flera tillämpningar inom bland annat mekaniken. Innan dessa tas upp behövs dock en rigorös definition:

Definition 1: Låt $a \leq b$. En vektorvärd funktion $\vec{r}: [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ av klass C^k , där parametern $t \mapsto \vec{r}(t) = [x_1(t) \dots x_n(t)]^T$, kallas en parametriserad och orienterad C^k kurva.

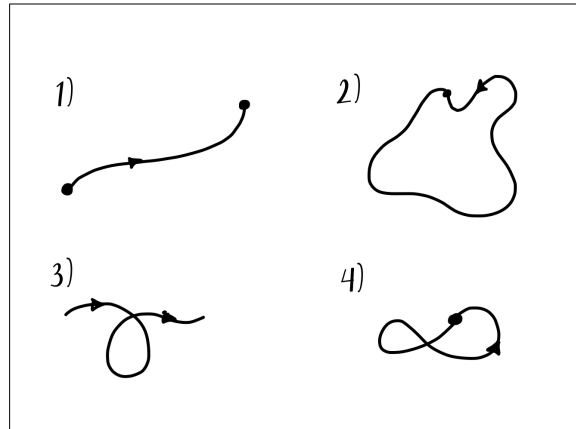
Observera att kurvan, formellt sett, bara ses som värdemängden av den vektorvärda avbildningen.

2.1 Enkla och slutna kurvor

För att kunna diskutera kring enkla och slutna kurvor behöver vi införa två begrepp. Om vi betraktar $\vec{r}$ som i Definition 1 så gäller:

- $\vec{r}(a)$ betraktas som startpunkten för kurvan.
- $\vec{r}(b)$ betraktas som slutpunkten för kurvan.

Vi säger då att kurvan är *sluten* om den uppfyller att $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$. Kurvan kallas istället *enkel* om $a \leq t_1 < t_2 < b \Rightarrow \vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2) \forall t_1, t_2 \in [a, b]$.



Figur 1: I figuren ovan presenteras olika exempel på kurvor i $\mathbb{R}^2$. 1) är ett exempel på en enkel och osluten kurva. 2) är istället sluten och enkel. 3) är varken sluten eller enkel medan 4) är sluten men ingen en enkel kurva.

2.2 Orienteringsbyten

När vi behandlar kurvor så spelar *orienteringen*, eller riktningen längs med vilken vi vandrar över kurvan, ofta en betydande roll. Ibland kan man behöva göra ett så kallat orienteringsbyte. För ett sådant byte, så rör man sig fortfarande längs samma kurva, fast baklänges.

Med det sedan tidigare införda $\vec{r}: [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$, som i Definition 1, så fås orienteringsbytet genom att låta $\vec{s}: [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ där

$$\vec{s}(t) = \vec{r}(b + a - t) \quad (18)$$

vilket triviellt uppfyller randvillkoren $\vec{s}(a) = \vec{r}(b)$ och analogt $\vec{s}(b) = \vec{r}(a)$.

2.3 Parameterbyten

Ett *parameterbyte* medför att kurvans värdemängd och orientering förblir oförändrad. Som en direkt följd, så betraktas kurvor som uppkommer ur varandra via parameterbyten betraktas, som identiska.

Om vi låter $\vec{r}: [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ och $\vec{s}: [c, d] \mapsto \mathbb{R}^n$ vara två C^k kurvor. Då gäller att de är *olika* parametriseringar av *samma* orienterade C^k kurva om det existerar en växande och bijektiv C^k funktion $\varphi: [a, b] \mapsto [c, d]$ så att $\vec{r}(t) = \vec{s}(\varphi(t)) \forall t \in [a, b]$.

Exempel: Tag den rätta linjen som förbinder punkterna $(0, 0)$ och $(1, 1)$ i $\mathbb{R}^2$. Denna linje kan parametriseras på oändligt många vis. Som exempel kan vi bilda följande parametriseringar:

$$\vec{r}_1(t) = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 1 \quad \vec{r}_2(t) = (t-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 1 \leq t \leq 2$$

Likaså behöver parametriseringen inte vara linjär i variabeln t , utan vi kan bilda en parametrisering på formen:

$$\vec{r}_3(t) = \sqrt{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 1$$

Trots att bilden av de olika parameterframställningarna är identisk, så kan dessa parameterbyten få konsekvenser i andra sammanhang. Om vi exempelvis väljer att betrakta parametern som en tid, så kan vi finna att hastigheten inte behöver vara densamma i en gemensam punkt för de olika parameterframställningarna.

2.4 Hastighet, fart och acceleration

För en C^1 -kurva av formen $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, där $t \in [a, b]$ och tolkas som tid definieras

- $\vec{r}'(t)$ som hastigheten vid t ,
- $\|\vec{r}'(t)\|$ som farten vid t .

Om $\vec{r}$ är av klass C^2 definieras även $\vec{r}''(t)$ som accelerationen vid t .

2.5 Längd

För en C^1 -kurva av formen $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ är totala längden av kurvan

$$L = \int_a^b ds = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt, \quad (19)$$

där ds är längdelementet på kurvan. En förståelse för (19) kan fås genom att betrakta en partikel som följer kurvan $\vec{r}$. På en infinitesimal tid dt rör sig partikeln $d\vec{r} = \vec{r}'(t)dt$ med längden $ds = \|d\vec{r}\| = \|\vec{r}'(t)\|dt$. ds kallas längdelementet på kurvan och ger upphov till (19) när den integreras över kurvans start- och slutpunkter.

Sats 1. *Längden av en C^1 -kurva beror inte på dess parametrisering eller orientering.*

Bevis. Låt $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ vara en växande C^1 -funktion. Dess parametriserade kurva ges av $\vec{r}(t) = \vec{s}(\varphi(t))$, där $a \leq t \leq b$. Den nya längden blir då

$$\begin{aligned} L^* &= \int_c^d \|\vec{s}'(u)\| \, du = \left[\begin{array}{l} u = \varphi(t) \\ du = \varphi'(t) dt \end{array} \right] = \int_c^d \|\vec{s}'(\varphi(t))\| \cdot \varphi'(t) \, dt = \\ &= \left[\begin{array}{l} \|\vec{s}'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\| = \\ = \frac{d}{dt}(\vec{s}(\varphi(t))) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) \end{array} \right] = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| \, dt = L \quad (20) \end{aligned}$$

□

Ett specialfall är om kurvan är en funktionsgraf i $\mathbb{R}^2$. Då är en naturlig parametrisering av kurvan

$$\vec{r}(x) = \begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix},$$

där $f(x)$ beskriver funktionsgrafen. Eftersom

$$\vec{r}'(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ f'(x) \end{bmatrix}$$

ger (19) att

$$L = \int_a^b \|\vec{r}'(x)\| \, dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx, \quad (21)$$

där a och b är kurvans start-, respektive slutpunkt.

2.6 Skalarprodukt

Sats 2. Låt $\vec{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{v} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tillhöra klass C^1 . Då gäller

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)) = \vec{u}'(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \cdot \vec{v}'(t) \quad (22)$$

Bevis.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)) &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n u_i(t) v_i(t) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (u_i(t) v_i(t)) \\
&= \sum_{i=1}^n u_i'(t) \cdot v_i(t) + \sum_{i=1}^n u_i(t) \cdot v_i'(t) \\
&= \vec{u}'(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \cdot \vec{v}'(t)
\end{aligned} \tag{23}$$

□

3 Ytor

I den andra föreläsningen, läsvecka 5, behandlades bland annat ytor och ytarea. Vi börjar med att introducera parametriserade C^k ytor

Definition 3.1. Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en kompakt kvaderbar mängd och $k, n \in \mathbb{Z}$ vara konstanter som uppfyller $k \geq 0, n \geq 2$. Då kallas en C^k funktion $\vec{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ för en parametriserad C^k -yta.

Anmärkning. I flervariabelanalysen behandlas huvudsakligen specialfallet då $n = 3$.

3.1 Beräkning av ytareor

Idén bakom beräkning av ytareor till parametriserade C^k -ytor är att först dela upp dem i infinitesimala parallelogram. Vi låter (s, t) vara ett hörn av en infinitesimal axelparallell rektangel och $(s + ds, t + dt)$ vara det motstående hörnet. Om vi nu tillämpar $\vec{r}$ funktionen på rektangeln får vi ett parallelogram med ett hörn $\vec{r}(s, t)$ och motstående hörn $\vec{r}(s + ds, t + dt)$.

Anmärkning. Som vi vet från linalgen går det lätt att beräkna arean av ett parallelogram med hjälp av kryssprodukten av de två vektorerna som spänner upp det.

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= \vec{r}(s + ds, t) - \vec{r}(s, t) \approx \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \cdot ds \\
\vec{v} &= \vec{r}(s, t + dt) - \vec{r}(s, t) \approx \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \cdot dt
\end{aligned} \tag{24}$$

Alltså blir den infinitesimala arean dS

$$\begin{aligned} dS &= \|\vec{u} \times \vec{v}\| \\ &= \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \cdot ds \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \cdot dt \right\| \\ &= \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right\| ds dt \end{aligned} \quad (25)$$

Om vi integrerar över D så får vi hela arean

$$\int \int_D dS = \int \int_D \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right\| ds dt \quad (26)$$

Det finns ett antal specialfall då detta uttryck kan förenklas.

3.1.1 Specialfall funktionsgraf

Om ytan ges av en funktionsgraf kan uttrycket förenklas. Då har vi

$$Y = \{(x, y, z) : (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2 \wedge z = f(x, y)\}, \quad (27)$$

med den naturliga parametriseringen

$$\begin{aligned} \vec{r}(x, y) &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_x \end{bmatrix} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_y \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -f'_x \\ -f'_y \\ 1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right\| ds dt &= \sqrt{f'^2_x + f'^2_y + 1} \end{aligned} \quad (28)$$

Ytarean blir alltså

$$\int \int_D \sqrt{f'^2_x + f'^2_y + 1} dx dy \quad (29)$$

3.1.2 Specialfall nivåyta

Om ytan istället är en nivåyta till en funktion $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$Y = \{(x, y, z) : F(x, y, z) = c \wedge (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2\} \quad (30)$$

och under antagandet att $F'_z \neq 0$ på hela Y . Då blir uttrycket för ytarean

$$\int \int_{D=\Pi(Y)} \frac{\|\nabla F\|}{|F'_z|} dx dy. \quad (31)$$