Sammanfattning mve035/mve600 läsvecka 4-5 grupp 5C

Alma Wallin, Jakob Fredby, Arvid Toft,
Hedda Nooij, Elias Rangert, Zihan Chen

Februari 2022

1 Föreläsning 7/2

1.1 Dubbelintegraler, fortsättning

1.1.1 Angående generaliserade integraler

Om f växlar tecken kan integralen $\iint_D f\,dx\,dy$ bero på beräkningsmetoden ifall den är generaliserad. Integralen kan då delas upp i $f = f^+ - f^-$, där $f^+, f^- \geq 0$

Observera att $|f| = f^+ + f^-$, så om $\iint_D |f|\,dx\,dy$ är konvergent kommer även $\iint_D f^+\,dx\,dy$ och $\iint_D f^-\,dx\,dy$ vara det, vilket innebär att $\iint_D f\,dx\,dy$ är konvergent och kan beräknas som vanligt.

Man kan även avgöra konvergens genom jämförelse, likt med enkelintegraler. Om det finns en funktion $g \geq |f|$ på D och $\iint_D g\,dx\,dy$ är konvergent, kommer även $\iint_D |f|\,dx\,dy$ vara konvergent. Analogt undersöks divergens med $0 \leq g \leq |f|$.

1.1.2 Integral över begränsad mängd

Definition: Låt $f : D \to \mathbb{R}$ och $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara begränsade. Låt Δ vara en axelparallell rektangel $D \subseteq \Delta$. $f_D(\bar{x}) = f(\bar{x})$ om $\bar{x} \in D$, $f_D(\bar{x}) = 0$ annars. Om integralen existerar är

$$\iint_D f\,dx\,dy = \iint_\Delta f_D\,dx\,dy.$$

Anmärkning: Det finns många möjliga Δ, men de ger alla samma resultat. Att f_D är integrerbar är dock inte självklart, då den kan bli diskontinuerlig på randen ∂D om $f \in C^0(D)$. Integration går bra om ∂D är en nollmängd $\Leftrightarrow \mu(\partial D) = 0 \Leftrightarrow D$ är en kvadrerbar mängd.

Lemma: Om f är likformigt kontinuerlig och begränsad på en kvadrerbar mängd D så är f integrerbar. **Bevisidé:** Med en tillräckligt fin indelning kan man "klämma in f_D godtyckligt väl" mellan trappfunktionerna Ψ och Φ, ty:

- På varje ruta helt i D är f kontinuerligt $\Rightarrow$ sats 6.1.3 fungerar
- På varje ruta helt utanför D är $\Psi = \Phi = 0$, ty $f = 0$ där.
- De rutor som skär randen har total area $< \varepsilon$ då ∂D är en nollmängd. Om $|f| < M$ blir bidraget $< M \cdot \varepsilon \to 0$

1.2 Trippelintegraler

De idéer och metoder som används för trippelintegraler är dessamma som för dubbelintegraler.

1.2.1 Volymberäkning

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara ett kompakt, kvadrerbart område. Volymen $\mu(D) = \iiint_D 1\, dx\, dy\, dz$ med volymelementet $dV = dx\, dy\, dz$.

Vanligtvis är D ett område mellan två funktioner. $D = \{(x, y, z)|(x, y) \in E, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$ där $\Pi(D) = E \subseteq \mathbb{R}^2$ är projektionen av d på xy-planet.

Trippelintegralen kan med hjälp av $\Pi(D)$ och D_z, vilket är snittet av volymen vid höjd z, delas upp på två olika sätt, vilka bygger på Fubinis sats:

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_{\Pi(D)} \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy,$$

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \iint_{D_z} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

1.2.2 Koordinater

Cylindriska: Likt polära koordinater i xy-planet, med en adderad z-koordinat. $(x, y, z) \leftrightarrow (\rho, \varphi, z)$, $x = \rho\, cos(\varphi)$, $y = \rho\, sin(\varphi)$, $z = z$. $dV = dx\, dy\, dz = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz$.

Sfäriska: $(x, y, z) \leftrightarrow (r, \theta, \phi)$, $x = r\, sin(\theta)\, cos(\phi)$, $y = r\, sin(\theta)\, sin(\phi)$, $z = r\, cos(\theta)$. $dV = dx\, dy\, dz = |J(r, \rho, \phi)|\, dr\, d\rho\, d\phi = r^2\, sin(\theta)\, dr\, d\rho\, d\phi$.

2 Föreläsning 10/2

2.1 Multipelintegraler

I detta stycke använder vi oss av följande exempel:

Exempel: Låt $B_n = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n, ||\bar{x}|| \leq 1\}$, det n-dimensionella enhetsklotet. Låt $\mu_n = \mu(B_n) = \int_{B_n} 1\, d\bar{x}$.

Notation: Om $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ betyder $\int f(\bar{x})\, d\bar{x} = \int\int \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$

Sats: Vi har rekursionsformeln $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = \pi$, $\mu_n = \frac{2\pi}{n} \cdot \mu_{n-2}$, $\forall n \geq 3$.

Formeln för μ_n ger volymen av det n-dimensionella enhetsklotet. Kontroll med $n = 3$ ger $\mu_3 = \frac{2\pi}{3} \cdot 2 = \frac{4\pi}{3}$, volymen av enhetsklotet i $\mathbb{R}^3$. Formeln stämmer.

Lemma: För $r > 0$ låt $B_{n,r} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : ||\bar{x}|| \leq r\}$. Då är $\mu(B_{n,r} = \mu_n r^n)$.

Bevis av lemma: Variabelbytet $\bar{x} = r\bar{y}$ har $\frac{\partial(\bar{x})}{\partial(\bar{y})} = rI$ (där rI är en nxn matris) $\Rightarrow \frac{d(\bar{x})}{d(\bar{y})} = r^n$ (en faktor per rad) $\Rightarrow \mu(B_{n,r}) = \int_{||\bar{x}|| \leq r} d\bar{x} = \int_{||\bar{y}|| \leq 1} dr^n\, \bar{y} = r^n \mu_n$.
$\square$

Bevis av sats: $n = 1$: $B_n = [-1, 1] \Rightarrow \mu_1 = \int_{-1}^{1} dx = 2$.

$n = 2$: Cirkelskiva med radie 1 har area $\mu_2 = \pi$.

$n \geq 3$: $1 \geq ||\bar{x}|| = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Leftrightarrow x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq 1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2$ (i)

Fixerar vi $x_1 ... x_{n-2}$ blir (i) en tvådimensionell cirkelskiva med radie $\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2}$ och area $\pi \cdot (1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2)$, projektionen av B_n på $x_1 ... x_{n-2}$-planet blir B_{n-2}. Fubini ger

$$\mu_n = \int_{B_n} dx_1 ... dx_n = \int_{B_{n-2}} (\iint_{(i)} dx_{n-1} dx_n) dx_1 ... dx_{n-2} = \pi \int_{B_{n-2}} (1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2) dx_1 ... dx_{n-2}.$$

Använd metoden för nivåytor i $n-2$ dimensioner. Låt $g(x_1...x_{n-2}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-2} x_i^2}$, $h(u) = 1 - u^2$. Integranden i ekvationen ovan blir $h(g(x_1, ..., x_{n-2}))$. I klotet B_{n-2} är $0 \leq g \leq 1$. Metoden ger $\mu_n = \pi \int_0^1 h(u)V'(u)du$ där $V(u)$ är en $n-2$ dimensionell volym av $\{\bar{x} \in B_{n-2} | g(\bar{x}) \leq u\} = B_{n-2,u}$, ett $n-2$ dimensionellt klot med radie u. Lemmat ger att V(u) $= \mu_{n-2} \cdot u^{n-2}$. Alltså:

$$\mu_n = \pi \cdot \int_0^1 (1-u^2)\frac{d}{du}(\mu_{n-2}u^{n-2})du = \pi \cdot \mu_{n-2} \cdot \int_0^1 (1-u^2)(n-2)u^{n-3}du =$$

$$\pi \cdot \mu_{n-2} \cdot (n-2) \cdot \left[\frac{u^{n-2}}{n-2} - \frac{u^n}{n}\right]_0^1 = \pi \cdot \mu_{n-2} \cdot (1 - \frac{n-2}{n}) = \frac{2\pi}{n} \cdot \mu_{n-2}. \square$$

2.2 Rekursionsformeln kan lösas

Definition: Gammafunktionen definieras som

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt, z \in \mathbf{C}, Re(z) > 0.$$

Den har egenskaper:

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
2. $\Gamma(n+1) = n!$ för $n \geq 0$ heltal
3. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Volymen av B_n är $\mu_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ för $n \geq 1$.

Bevis: $n = 1$ ger $\mu_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{1}{2} \cdot \Gamma(\frac{1}{2})} = 2$, $n = 2$ ger $\mu_2 = \frac{\pi}{\Gamma(2)} = \frac{\pi}{1!} = \pi$. $n \geq 3$ ger

$$\frac{\mu_n}{\mu_{n-2}} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n-2}{2}+1)}{\pi^{\frac{n-2}{2}}} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2}) \cdot \pi^{\frac{n}{2}} \cdot \pi^{-1}} = \frac{\pi}{\frac{n}{2}} = \frac{2\pi}{n}.$$

Tillägg: En $n-1$-dimensionell sfär i $\mathbb{R}^n$ är $S^{n-1} = \{\bar{x} \in \mathbb{R} : ||\bar{x}|| = 1\}$ dvs $S^{n-1} = \partial B_n$. $dV = Adr$, motiverar $A_n =$ ytarea$(S^{n-1}) = \frac{d}{dr}(\mu(B_{n,r}))|_{r=1} = \frac{d}{dr}(\mu_n \cdot r^n)|_{r=1} = n\mu_n \Rightarrow A_n = n\mu_n = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$.

Alltså $A_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$.

2.3 Tillämpningar av trippelintegral

Massberäkning: Låt område $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara kompakt, kvardrerbart, och ockuperas av en föremål med densitet $\rho = \rho(x, y, z)$. Dess massa ges av:

$$M = \iiint_D \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Medelvärde: Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ på $D \subseteq \mathbb{R}^3$ så ges dess medelvärde av:

$$\bar{f_D} = \frac{1}{\mu(D)} \iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \frac{\iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\iiint_D 1\, dx\, dy\, dz}.$$

Masscentrum: Medelvärdet av positionen av föremålets massa kan även skrivas som en vektor $\vec{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}$, där m_x fås genom:

$$m_x = \frac{1}{M} \iiint_D x\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

m_y och m_z kan fås på samma sätt.

Tröghetsmoment: Trippelintegraler kan även beskriva tröghetsmoment kring en axeln L:

$$I_L = \iiint_D \rho d^2\, dx\, dy\, dz$$

Där $d = d(x, y, z)$ och är avståndet från (x, y, z) till axeln L.

3 Föreläsning 14/2

3.1 Kurvor

Definition: låt a $\leq$ b. En funktion $\bar{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ av klass C^k med notation t $\mapsto \bar{r}(t) = [x_1(t), ..., x_n(t)]^T$ kallas **parametriserad** och **orienterad C^k-kurva**.

Kurvan har startpunkt $\bar{r}(a)$ och slutpunkt $\bar{r}(b)$. Kurvan är **sluten** om $\bar{r}(a) = \bar{r}(b)$, och **enkel** om $a \leq t_1 < t_2 < b \Rightarrow \bar{r}(t_1) \neq \bar{r}(t_2)$

Fysikalisk tolkning: En partikel rör sig från $\bar{r}(a)$ till $\bar{r}(b)$ med position $\bar{r}(t)$ vid tiden t.

3.2 Orienteringsbyte

Orienteringsbyte ger samma bana, men baklänges. Byt $\bar{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ mot $\bar{s} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ där $\bar{s}(t) = \bar{r}(b + a - t)$, $a \leq t \leq b$.

3.3 Parameterbyte

Behåller samma kurva, dvs värdemängd, och orientering, men ändrar vilka parametervärden som tillhör vilka punkter.

Om $\bar{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ och $\bar{s} : [c, d] \to \mathbb{R}^n$, C^k-kurvor. De är olika parametriseringar av samma orienterade C^k om $\exists \varphi : [a, b] \to [c, d]$ är en växande bijektiv C^k-funktion så att $\bar{r}(t) = \bar{s}(\varphi(t))$ $\forall t \in [a, b]$.

3.4 Hastighet, fart, acceleration

t tolkas som tid.

Definition: Låt $\bar{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ vara C^1-kurva och $t \in [a, b]$. $\bar{r}'(t)$ kallas **hastigheten** vid tid t. $\| \bar{r}\,'(t) \|$ kallas **farten** vid tid t. Om $\bar{r}$ är en C^2-kurva har vi även accelerationen som är $\bar{r}''(t)$ vid tiden t.

3.5 Längd

Låt $\bar{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ vara en C^1-kurva.

Hastighetsvektorn $\bar{r}'(t)$ är tangent till kurvan i samma riktning som orienteringen. På en infinitesimal tid dt rör sig partikeln $d\bar{r} = \bar{r}'(t)dt$ med längden $ds = \| d\bar{r} \| = \| \bar{r}\,'(t) \| \, dt$. ds (ibland dr) kallas **längdelementet** på kurvan.

Den totala längden av kurvan är

$$L = \int_a^b ds = \int_a^b \| \bar{r}\,'(t) \| \, dt.$$

Sats: Längden av en C^1-kurva beror ej på parametrisering eller orientering.

Saysen kan visas på följande sätt: Låt $\varphi[a, b] \to [c, d]$ vara en växande och bijektiv C^1-funktion $\bar{r}(t) = \bar{s}(\varphi(t)) a \leq t \leq b$. Den nya längden blir då

$$L^* = \int_c^d \| \bar{s}\,'(u) \| \, du = ... = \int_a^b \| \bar{r}\,'(t) \| \, dt = L.$$

I ekvationen utnyttjar man variabelbytet $u = \varphi(t)$.

Ett speciallfall är när kurvan är en funktionsgraf i $\mathbb{R}^2$, alltså $y = f(x)$. Då är det naturligt att parametrisera $\bar{r}$ med x och f(x). Då får man

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

3.6 Skalärprodukt

Sats: låt $\bar{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \bar{v} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ vara C^1. Då är
$\frac{d}{dt}(\bar{u}(t) \cdot \bar{v}(t)) = \bar{u}\,'(t) \cdot \bar{v}(t) + \bar{u}(t) \cdot \bar{v}\,'(t)$.

Bevis:

$$\frac{d}{dt}(\bar{u}(t) \cdot \bar{v}(t)) = \bar{u}\,'(t) \cdot \bar{v}(t) + \bar{u}(t) \cdot \bar{v}\,'(t) = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} u_i(t)v_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}(u_i(t)v_i(t)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i\,'(t)v_i(t) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)v_i\,'(t) = \bar{u}\,'(t) \cdot \bar{v}(t) + \bar{u}(t) \cdot \bar{v}\,'(t). \ \Box$$

4 Föreläsning 15/2

4.1 Ytor

Definition: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en kompakt och kvadrerbar mängd, $k \geq 0$, $n \geq 2$. En C^k-funktion $\bar{r} : D \to \mathbb{R}^n$ kallas då för en parametriserbar C^k-yta.

Man kan ha ytor i godtyckligt många dimensioner, men här fokuserar vi på ytor i tre dimensioner.

4.2 Ytarea

För att bestämma arean av en yta studeras infinitdecimala axellparallela rektanglar, vilka avbildas på parallellogram med $\bar{r}$. $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är parallellogramets sidor i vektorform och de kan linjäriseras enligt följande

$$\bar{u} = \bar{r}(s + ds, t) - \bar{r}(s, t) = \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} ds$$
$$\bar{v} = \bar{r}(s, t + dt) - \bar{r}(s, t) = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} dt.$$

Den infinitdecimala arean, ds, blir då $||\frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}||\ dtds$ och med hjälp av detta beräknas den totala arean enligt detta

$$\iint_D ds = \iint_D \left\| \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \right\| \ dtds.$$

4.2.1 Specialfall 1 - Ytan ges av en funktionsgraf

$$Y = \{(x, y, z) | (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2, z = f(x, y)\}$$
$$\bar{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$$
$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial x} = (1, 0, f\ '_x) \qquad \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} = (1, 0, f\ '_y).$$

I detta fall blir ytarean

$$\iint_D \sqrt{(f\ '_x)^2 + (f\ '_y)^2 + 1}\ dxdy.$$

4.2.2 Specialfall 2 - Nivåyta till en funktion: $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$Y = \{(x, y, z) | F(x, y, z) = C, (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2\}.$$

Antag att $f'_z \neq 0$ på hela ytan, ytarean blir då

$$\iint_{D=\Pi(Y)} \frac{\|\nabla F\|}{|f\ '_z|}\ dxdy.$$

4.3 Fysikalisk tillämpning av skalärprodukt

Antag att en partikel med massa m som följer en C^2 kurva. $\bar{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$. Förändringen i kinetisk energi är

$$\frac{1}{2}m\|\bar{r}\ '(b)\|^2 - \frac{1}{2}m\|\bar{r}\ '(a)\|^2 = \frac{1}{2}m \int_a^b \frac{d}{dt}(\|\bar{r}\ '(t)\|^2)dt =$$
$$\frac{1}{2}m \int_a^b \frac{d}{dt}(\bar{r}\ '(t) \cdot \bar{r}\ '(t))dt = \int_a^b (m\bar{r}\ '\ '(t)) \cdot \bar{r}\ '(t)dt = \int_a^b \bar{F}(t) \cdot \bar{r}\ '(t)dt.$$

$\bar{F}$ är kraften som verkar på partikeln. Oftast beror $\bar{F}$ bara på positionen men inte på tiden. I ett statiskt vektorfält $\bar{F}\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ får vi då kurvintegralen $\int_a^b F(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}\ '(t)dt$. Arbetsintegralen ger då att arbetet kraften utför på partikeln = förändringen i partikelns energi.

4.4 Kryssprodukt

Låt u: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ och v: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ vara C^1. Då är

$$\frac{d}{dt}(\bar{u}(t) \times \bar{v}) = \bar{u}\,'(t) \times \bar{v}(t) + \bar{u} \times \bar{v}\,'(t).$$

Bevis: Använd samma idé som i beviset för skalärprodukt.

4.5 Fysikalisk tillämpning av kryssprodukt

Definition: En partikelns rörelsemängdsmoment kring origo är $\bar{L} = m(\bar{r} \times \bar{v})$ där $\bar{r}$ ortsvektorn och $\bar{v}$ hastigheten.

Definition: En partikel följer en centralrörelse kring origo om kraften den upplever alltid är riktad mot origo.

Antag att en partikel med position $\bar{r}(t)$ följer en centralrörelse kring origo $\Rightarrow$ $\bar{L}(t) = m(\bar{r}(t) \times \bar{r}\,'(t))$. Då blir

$$\frac{d}{dt}(\bar{L}(t)) = m(\bar{r}\,'(t) \times \bar{r}\,'(t) + \bar{r}(t) \times \bar{r}\,'\,'(t)) = \bar{r}(t) \times (m\bar{r}\,'\,'(t)) = \bar{r}(t) \times \bar{F}(t).$$

Att det är en centralrörelse ger att $\bar{F}(t)$ och $\bar{r}(t)$ är motriktade och där är $\bar{r}(t) \times \bar{F}(t) = 0 \implies \frac{d}{dt}(\bar{L}(t)) = 0$ vilket innebär att rörelsemängdsmomentet är konstant. Några konsekvenser som följer är:

Konsekvens 1: $\frac{d}{dt}(\bar{r}(t) \times \bar{r}\,'(t)) = 0 \implies \bar{r}(t) \times \bar{r}\,'(t) = \bar{C}$ vilket betyder att $\bar{r}(t)$ och $\bar{v}(t)$ spänner upp ett fixt plan $\implies$ Partikeln rör sig i ett plan.

Konsekvens 2: Arean av triangeln $dA = 1/2\|\bar{r}(t) \times \bar{r}\ '(t)\|dt \implies \frac{dA}{dt}$ är konstant. Då sveper partikeln ut en area kring central punkten med konstant takt.

Av konsekvens 1 och 2 följer sedan Keplers lagar.