

Demonstration 5

MVE035/MVE600 - Flervariabelanalys

Hampus Renberg Nilsson, MSc.

`Hampus.Renberg.Nilsson@chalmers.se`

Våren 2022

Dagens genomgång: 3.extra, 3.7(+ ytarea), 8.16, 9.4

Uppgift 3.extra

En partikel följer banan i planet som ges av

$$\mathbf{r}(t) = (t^2 - 2t, t^2 + 2t), \quad t \in [-1, 1]. \quad (1)$$

- (i) Skissa banan.
- (ii) Beräkna partikelns hastighet och fart vid $t = 1/3$.
- (iii) Bestäm banans längd.
- (iv) Om banan beskriver en frittfallande partikel i ett kraftfält $\mathbf{F}$, förklara varför $\mathbf{F}$ är konstant längs banan.

Lösning (i)

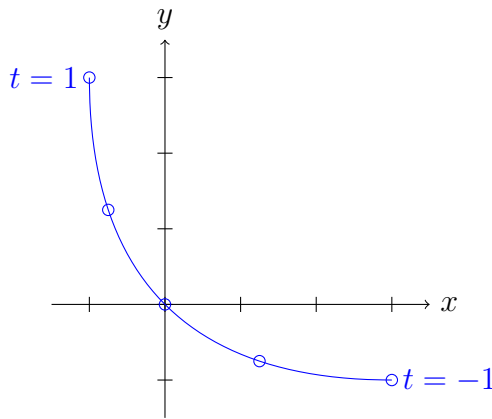
Vi kan börja med att ta fram några punkter, se Tabell 1.

Tabell 1: Punkter på banan.

t	x	y
-1	$1 + 2 = 3$	$1 - 2 = -1$
$-\frac{1}{2}$	$0.25 + 1 = 1.25$	$0.25 - 1 = -0.75$
0	0	0
$\frac{1}{2}$	$0.25 - 1 = -0.75$	$0.25 + 1 = 1.25$
1	$1 - 2 = -1$	$1 + 2 = 3$

Vi kan notera att $\mathbf{r}(-t) = (t^2 + 2t, t^2 - 2t)$.

Låt oss nu skissa, då får vi något likt



Lösning (ii)

Hastigheten ges av tidsderivatan av positionen,

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (2t - 2, 2t + 2) \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{3}\right) = \left(2 \cdot \frac{1}{3} - 2, 2 \cdot \frac{1}{3} + 2\right) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right). \quad (2)$$

Farten ges av beloppet av hastigheten,

$$\left| \dot{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{3}\right) \right| = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{16 + 64}}{3} = \frac{\sqrt{80}}{3}. \quad (3)$$

Lösning (iii)

Längden ges av

$$\begin{aligned} l &= \int_{\gamma} |\mathrm{d}\mathbf{r}| = \int_{-1}^1 |\mathbf{r}'(t)| \, dt = \int_{-1}^1 \sqrt{(2t-2)^2 + (2t+2)^2} \, dt \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{(4t^2 - 8t + 4) + (4t^2 + 8t + 4)} \, dt = 2\sqrt{2} \int_{-1}^1 \sqrt{t^2 + 1} \, dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Integralen här är lite jobbig, men kan beräknas med partiell integration,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{t^2 + 1} \, dt &= t\sqrt{t^2 + 1} - \int \frac{t \cdot 2t}{2\sqrt{t^2 + 1}} \, dt = t\sqrt{t^2 + 1} - \int \frac{t^2 + 1 - 1}{\sqrt{t^2 + 1}} \, dt \\ &= t\sqrt{t^2 + 1} - \int \sqrt{t^2 + 1} \, dt + \int \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \, dt, \\ \Rightarrow 2 \int \sqrt{t^2 + 1} \, dt &= t\sqrt{t^2 + 1} + \ln \left| t + \sqrt{t^2 + 1} \right|, \\ \Rightarrow \int_{-1}^1 \sqrt{t^2 + 1} \, dt &= \frac{1}{2} \left(1\sqrt{2} + \ln \left| 1 + \sqrt{2} \right| - (-1)\sqrt{2} - \ln \left| -1 + \sqrt{2} \right| \right) \\ &= \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right|. \end{aligned} \quad (5)$$

Alltså får vi att längden är

$$l = 2\sqrt{2} \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right| \right) = 4 + \sqrt{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right| \approx 6.49. \quad (6)$$

Lösning (iv)

Accelerationen ges av

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = (2, 2) = \mathbf{a}(t). \quad (7)$$

Eftersom $\mathbf{a}$ är konstant, och $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, är också $\mathbf{F}$ konstant.

Uppgift 3.7(+ ytarea)

a) Punkten $P : (0, 1, 1)$ ligger på ytan

$$\begin{cases} x = s \cos t, \\ y = s \sin t, \\ z = s^2 \end{cases} \quad (8)$$

där $s \in [0, 2], t \in [0, 2\pi]$. Bestäm en normalriktning i P till ytan.

b) Skissera ytan i a).

extra) Bestäm ytarean.

Lösning a

Tangentvektorerna $\mathbf{r}'_s$ och $\mathbf{r}'_t$ ligger i planet, så deras vektorprodukt är en normal till planet. Normalen ges alltså av

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2s \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -s \sin t \\ s \cos t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 2s^2 \cos t \\ -2s^2 \sin t - 0 \\ s \cos^2 t + s \sin^2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s^2 \cos t \\ -2s^2 \sin t \\ s \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Men vad är s och t då?

- $P_z = 1 \implies s = 1.$
- $P_x = 0 \implies t \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right\}.$
- $P_y = 1 \implies t = \frac{\pi}{2}.$

Vi stoppar in våra värden på s och t och får att normalvektorn alltså är

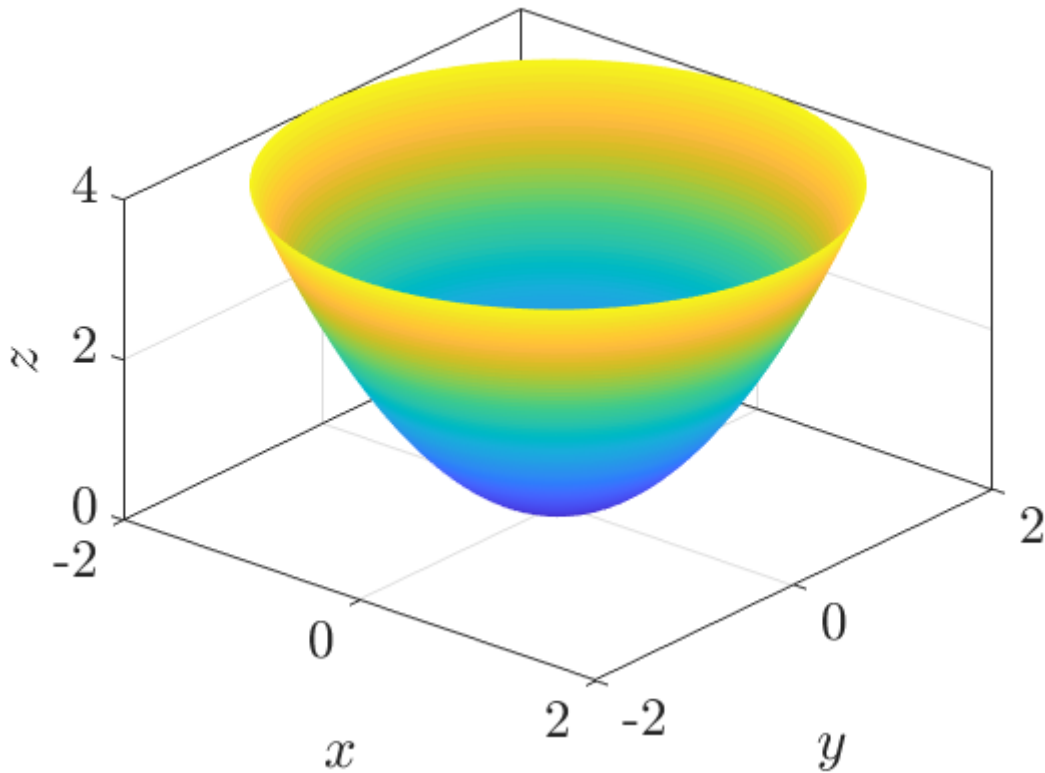
$$\mathbf{n} = \left(-2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right), -2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right), 1 \right) = (0, -2, 1). \quad (10)$$

Lösning b

Parametriseringen för x och y ger en cirkel i xy -planet med radie $s \leq 2$.

Parametriseringen för z gör att ju större radien är desto högre upp hamnar ytan, $\max = 2^2 = 4$.

Om vi försöker skissa detta borde det alltså bli något likt Figur 1.



Figur 1: Ytan.

Lösning extra

För att beräkna ytarean kan vi integrera över alla små ytelement av ytan,

$$\begin{aligned}
 A &= \int_S |\mathrm{d}\mathbf{S}| = \iint_S \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right| \mathrm{d}s \mathrm{d}t = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{(-2s^2 \cos t)^2 + (-2s^2 \sin t)^2 + s^2} \mathrm{d}t \mathrm{d}s \\
 &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{4s^4 + s^2} \mathrm{d}t \mathrm{d}s = 2\pi \int_0^2 s \sqrt{1 + 4s^2} \mathrm{d}s = \left\{ \begin{array}{l} u = 1 + 4s^2, \\ \mathrm{d}u = 8s \mathrm{d}s, \\ u \in (1, 17) \end{array} \right\} = \frac{\pi}{4} \int_1^{17} \sqrt{u} \mathrm{d}u \\
 &= \frac{\pi}{4} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_1^{17} = \frac{\pi}{6} (17^{3/2} - 1).
 \end{aligned} \tag{11}$$

Uppgift 8.16

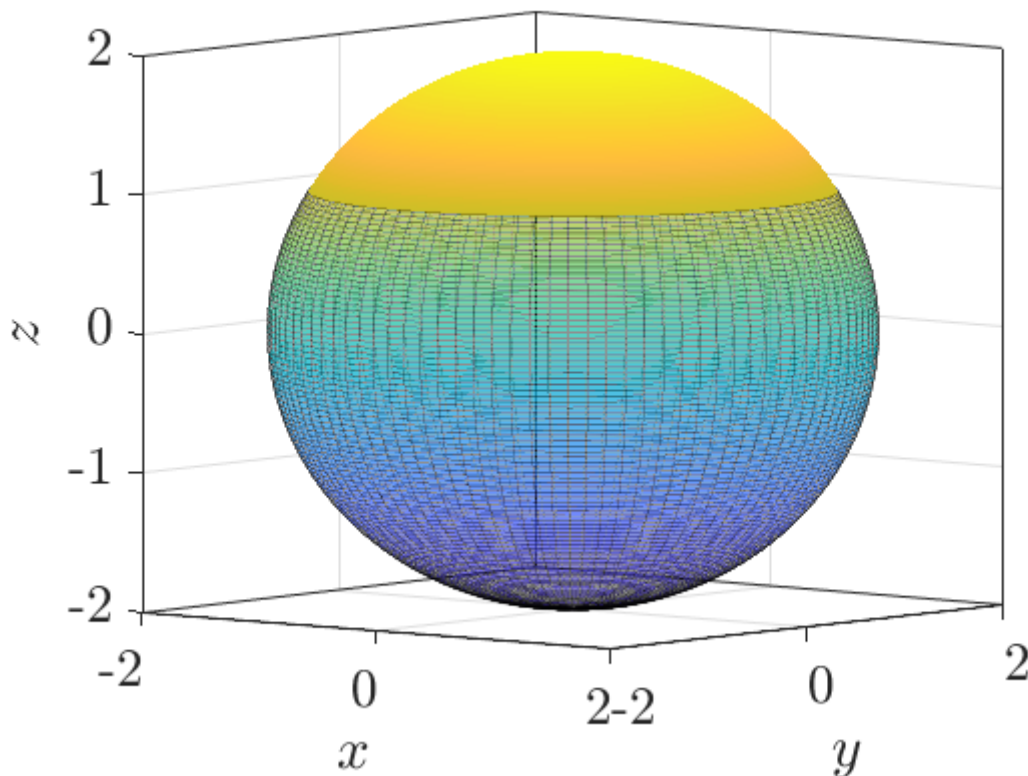
Låt Y vara den sfäriska kalotten

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z \geq 1. \tag{12}$$

- Ge en parameterframställning av Y .
- Bestäm en normalvektor till Y .
- Beräkna arean av Y .
- Beräkna arean av $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq h$, $h \in [0, R]$.

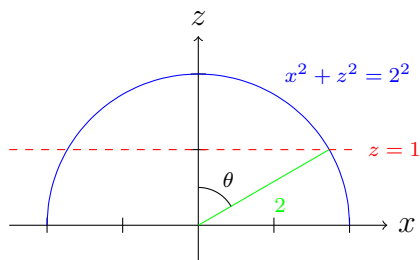
Lösning a

Ytan är ritad i Figur 2.



Figur 2: En sfär med radie 2 och ytan Y .

Ytan är symmetrisk i xy -planet, så vi kan nöja oss med att studera ytan i xz -planet. Där får vi



Vi vet redan hur att parameterframställa en sfär. Men nu har vi bara den övre delen av en sfär, så vi söker alltså vinkeln θ .

Vi ser att θ ligger i en triangel med hypotenusan 2 och närliggande katet 1. Vi kan alltså beräkna θ enligt

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3}. \quad (13)$$

Ytans parameterframställning ges alltså av

$$\mathbf{r} = (2 \sin \theta \cos \varphi, 2 \sin \theta \sin \varphi, 2 \cos \theta), \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right], \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (14)$$

Lösning b

Vi kan direkt notera att en normalvektor i en punkt (x, y, z) ges av just (x, y, z) , ty så är alltid fallet för en sfär (think about it!), men vi kan också beräkna det algebraiskt,

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \mathbf{r}'_\theta \times \mathbf{r}'_\varphi = \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \cos \varphi \\ 2 \cos \theta \sin \varphi \\ -2 \sin \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \sin \theta \sin \varphi \\ 2 \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 + 4 \sin^2 \theta \cos \varphi \\ 4 \sin^2 \theta \sin \varphi - 0 \\ 4 \sin \theta \cos \theta \cos^2 \varphi + 4 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi \end{pmatrix} \\ &= 2 \sin \theta \begin{pmatrix} 2 \sin \theta \cos \varphi \\ 2 \sin \theta \sin \varphi \\ 2 \cos \theta \end{pmatrix} = 2 \sin \theta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{15}$$

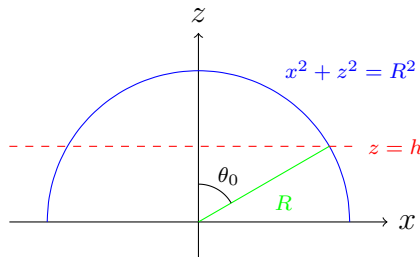
Lösning c

Arean beräknas genom att summera över alla infinitesimala ytelement,

$$\begin{aligned}A &= \int_S dS = \iint_S dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{2\pi} 2^2 \sin \theta d\varphi d\theta = 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin \theta d\theta \\ &= 8\pi [-\cos \theta]_0^{\frac{\pi}{3}} = 8\pi \left(-\frac{1}{2} - (-1) \right) = 4\pi.\end{aligned}\tag{16}$$

Lösning d

Vi tillämpar samma lösningsgång som tidigare. Vi börjar med att skissa för att identifiera vinkeln θ_0 från z -axeln,



Vi ser att

$$\cos \theta_0 = \frac{h}{R}.\tag{17}$$

Arean blir således

$$\begin{aligned}A &= \int_S dS = \iint_S dx dy = \int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} R^2 \sin \theta d\varphi d\theta = 2\pi R^2 \int_0^{\theta_0} \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi R^2 [-\cos \theta]_0^{\theta_0} = 2\pi R^2 \left(-\frac{h}{R} - (-1) \right) = 2\pi R(R - h).\end{aligned}\tag{18}$$

Uppgift 9.4

Beräkna

$$\int_{\gamma} y \ln \frac{x^2}{y} dx - \frac{x}{y} dy, \quad (19)$$

där γ är parabelbågen $y = x^2$ från punkten $(1, 1)$ till $(2, 4)$.

Lösning

Vi börjar med att parametrisera kurvan,

$$x = t, \quad dx = dt, \quad y = t^2, \quad dy = 2t dt, \quad t \in (1, 2). \quad (20)$$

Vi kan därmed beräkna integralen enligt

$$I = \int_1^2 \left(t^2 \ln \frac{t^2}{t^2} - \frac{t}{t^2} 2t \right) dt = \int_1^2 -2 dt = -2. \quad (21)$$