Demonstration 6

MVE035/MVE600 - Flervariabelanalys

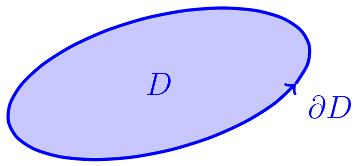
Hampus Renberg Nilsson, MSc.
Hampus.Renberg.Nilsson@chalmers.se

Våren 2022

Dagens genomgång: 9.10, 9.24, 9.30, 9.39, 10.62

Greens formel

Greens formel säger att, under vissa förutsättningar, så gäller för ett område D



att

$$\oint_{\partial D} P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y. \tag{1}$$

Eller kort i ord: Kurvintegralen till randen av en yta kan skrivas om till en dubbelintegral över ytan.

Uppgift 9.10

Beräkna

$$\int_{\gamma} y^2 \,\mathrm{d}x + x^2 \,\mathrm{d}y \tag{2}$$

där γ är cirkeln $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ genomlöpt ett varv moturs.

Lösning

Kurvan är en randen till ett slutet område $\implies$ vi kan använda Greens formel! Vi har alltså att

$$I = \oint_{\partial S} y^2 \,\mathrm{d}x + x^2 \,\mathrm{d}y = \iint_{S} \left(\frac{\partial}{\partial x} x^2 - \frac{\partial}{\partial y} y^2 \right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \iint_{S} (2x - 2y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y. \tag{3}$$

Med variabelsubstitutionen

$$\begin{aligned} x &= a + \rho\cos\theta, \\ y &= b + \rho\sin\theta, \\ \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y &= \rho \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\rho \end{aligned} \tag{4}$$

får vi

$$
\begin{aligned}
I &= 2\int_0^r \int_0^{2\pi} (a + \rho\cos\theta - b - \rho\sin\theta)\rho \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\rho \\
&= 2\int_0^r \rho \left[\theta(a-b) + \rho(\sin\theta + \cos\theta)\right]_{\theta=0}^{2\pi} \mathrm{d}\rho \\
&= 2\int_0^r \rho \cdot 2\pi(a-b)\,\mathrm{d}\rho \\
&= 2\cdot 2\pi(a-b)\left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_0^r = 2\pi r^2(a-b).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Uppgift 9.24

Beräkna arean av området mellan x-axeln och cykloidbågen

$$
\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]. \tag{6}
$$

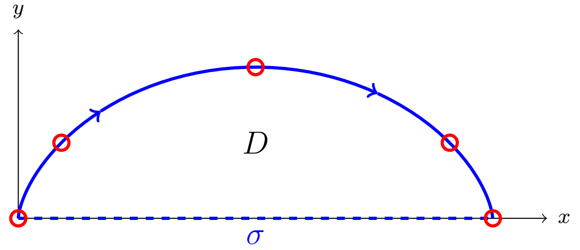
Lösning

Låt oss börja med att skissa området. För att göra det kan vi först välja ut några stickprov av x och y för olika värden på t, se Tabell 1.

Tabell 1: x- och y-värden längs kurvan.

t	x	y
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} - 1$	1
π	π	2
$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi + 1$	1
2π	2π	0

Om vi skissar detta får vi något likt



Arean kan beräknas enligt

$$
A = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}x - \frac{\partial}{\partial y}0\right)}_{=1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_{\partial D} 0\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \oint_{\partial D} x\,\mathrm{d}y. \tag{7}
$$

Vår kurva γ är dock inte lika med ∂D, men om vi lägger till sträckan σ längs x-axeln har vi att

$$\oint\limits_{\partial D} x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{\sigma} x\,\mathrm{d}y - \int\limits_{\gamma} x\,\mathrm{d}y. \tag{8}$$

Längs x-axeln är förändringen i y noll, dvs $\mathrm{d}y = 0$, så vi kan förenkla detta till

$$A = -\int\limits_{\gamma} x\,\mathrm{d}y. \tag{9}$$

Längs kurvan γ gäller att

$$\begin{aligned} x &= t - \sin t, \\ \mathrm{d}y &= \sin t\,\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{10}$$

så vi har att

$$A = -\int\limits_{\gamma} x\,\mathrm{d}y = -\int\limits_{0}^{2\pi} (t - \sin t)\sin t\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t}_{I_1} - \underbrace{\int\limits_{0}^{2\pi} t\sin t\,\mathrm{d}t}_{I_2}. \tag{11}$$

Den första integralen kan beräknas enligt

$$I_1 = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \pi, \tag{12}$$

och den andra med partiell integration,

$$I_2 = \int\limits_{0}^{2\pi} t\sin t\,\mathrm{d}t = [-t\cos t]_0^{2\pi} - \underbrace{\int\limits_{0}^{2\pi} -\cos t\,\mathrm{d}t}_{=0} = -2\pi. \tag{13}$$

Arean är slutligen alltså

$$A = I_1 - I_2 = \pi - (-2\pi) = 3\pi. \tag{14}$$

Potentialfält

Ett vektorfält $\boldsymbol{F}$ sägs vara ett **potentialfält**, eller ett **konservativt** fält, om det finns ett skalärfält U som uppfyller

$$\boldsymbol{F} = \nabla U. \tag{15}$$

För en kurvintegral av ett potentialfält, spelar bara start- och slutpunkterna för kurvan roll. Med andra ord, kurvintegralen är oberoende av vägen.

Uppgift 9.30

Är kraftfältet

$$\boldsymbol{F} = \left(x^3 - 3xy^2, y^3 - 3x^2y\right) \tag{16}$$

konservativt i $\mathbb{R}^2$? Bestäm i så fall en potentialfunktion U.

Lösning

Låt oss börja med att integrera F_x,

$$U = \int F_x \,\mathrm{d}x = \int x^3 - 3xy^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2y^2 + g(y). \tag{17}$$

Om det finns en potential U är den alltså lika med detta ovan, där $g(y)$ är någon funktion som eventuellt är beroende av y, *men ej* beroende av x. Låt oss nu derivera U m.a.p. y och jämföra med F_y,

$$\frac{\partial U}{\partial y} = g'(y) - 3x^2y \overset{?}{=} y^3 - 3x^2y \quad \Longrightarrow \quad g'(y) = y^3 \quad \Longrightarrow \quad g(y) = \frac{1}{4}y^4 + C. \tag{18}$$

Det finns alltså en potential U som ges av

$$U = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 + C \tag{19}$$

för godtycklig konstant C, och $\boldsymbol{F}$ är alltså konservativt.

Uppgift 9.39

Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \left(\sqrt{x^2 - y} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-y}}\right) \mathrm{d}x - \frac{x}{2\sqrt{x^2-y}}\,\mathrm{d}y \tag{20}$$

där γ är kurvan $x = y^2$ från $(1, -1)$ till $(4, -2)$.

Lösning

Jobbig integrand, men den ser ut att ev. ha en potential vilket skulle kunna underlätta. För att undersöka detta, låt oss först notera att

$$\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2 - y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2-y}} \cdot (-1) \tag{21}$$

vilket ger oss att

$$U = \int -\frac{x}{2\sqrt{x^2-y}}\,\mathrm{d}y = x\sqrt{x^2-y} + g(x). \tag{22}$$

Låt oss nu derivera U m.a.p. x så får vi

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \sqrt{x^2-y} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-y}} \cdot 2x + g'(x) \quad \Longrightarrow \quad g(x) = C. \tag{23}$$

Vi har alltså att det finns en potential U som ges av

$$U = x\sqrt{x^2-y} + C. \tag{24}$$

Alltså ges integralen av att ta potentialen i slutpunkten minus startpunkten,

$$\begin{aligned}\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= U(4,-2) - U(1,-1) = 4\sqrt{4^2-(-2)} - 1\sqrt{1^2-(-1)} \\ &= 4\sqrt{18} - \sqrt{2} = 12\sqrt{2} - \sqrt{2} = 11\sqrt{2}.\end{aligned} \tag{25}$$

Uppgift 10.62

Är $\boldsymbol{u} = (2xy^2z, 2x^2yz, x^2y^2 - 2z)$ ett potentialfält? Beräkna

$$\int_\gamma \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{26}$$

längs kurvan γ given av $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t, \sin t, \sin t), \quad t \in [0, \pi/2]$.

Lösning

Låt oss börja med att undersöka huruvida $\boldsymbol{u}$ är ett potentialfält. Vi börjar med att integrera x-komponenten,

$$U = \int u_x \, \mathrm{d}x = \int 2xy^2z \, \mathrm{d}x = x^2y^2z + g(y, z). \tag{27}$$

Låt oss nu derivera m.a.p. y och jämföra med u_y så får vi

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2x^2yz + g'_y(y, z) = 2x^2yz \quad \Longrightarrow \quad g(y, z) = h(z). \tag{28}$$

Låt oss nu derivera m.a.p. z och jämföra med u_z så får vi

$$\frac{\partial U}{\partial z} = x^2y^2 + h'(z) = x^2y^2 - 2z \quad \Longrightarrow \quad h(z) = -z^2 + C. \tag{29}$$

Det finns alltså en potential

$$U = x^2y^2z - z^2 + C. \tag{30}$$

Alltså är det bara startpunkten $(\cos 0, \sin 0, \sin 0) = (1, 0, 0)$ och slutpunkten $\left(\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}\right) = (0, 1, 1)$ som påverkar vår kurvintegral. Den är alltså

$$\int_\gamma \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = U(0, 1, 1) - U(1, 0, 0) = (-1) - 0 = -1. \tag{31}$$