

Tavelpresentation 5E

Johannes Ask Nicklas Brodin Melvin Glans Eric Jigrup

Haldo Ryberg Ellen Åkermo

5 mars 2022

1 Trippelintegraler och volymeräkningar

För att beräkna volymer med hjälp av trippelintegraler, kan liknande tankesätt används som för dubbelintegraler.

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara kompakt och kvadrerbart område. Då är volymen

$$\mu(D) = \iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz. \quad (1)$$

Det första steget är att identifiera området D som integreras över. Det är vanligt att D är mellan två funktioner $\alpha(x, y)$ och $\beta(x, y)$. En användbar metod för att hitta dessa områden är att projicera D på ett av de kartesiskska koordinatplanen. Detta kan beskrivas som

$$D = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in E, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\} \quad (2)$$

så att E är projektionen av D på xy -planet, vilket även kan skrivas som $\Pi(D)$.

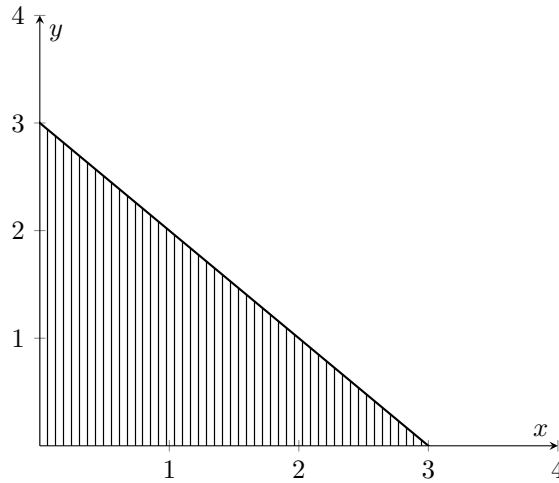
Fubinis sats fungerar på trippelintegraler på samma sätt som på dubbelintegraler. Därför kan en trippelintegral skrivas som

$$\mu(D) = \iint_{\Pi(D)} \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} 1 \, dz \right) dx \, dy = \int_a^b \left(\iint_{\Pi(D)} 1 \, dx \, dy \right) dz. \quad (3)$$

För att illustrera dessa räknemetoder, definiera en tetraeder med sidorna 3. För att beräkna dessa, projicera tetraedern på xy -planet. Detta är i praktiken detsamma som att fixera z och skära en tunn skiva dz . Då blir ekvationen på formen

$$\iint_{\Pi(D)} \left(\int_0^{3-x-y} 1 \, dz \right) dy \, dx = \int_0^3 \int_0^{3-x} \int_0^{3-x-y} 1 \, dz \, dy \, dx \quad (4)$$

där projektionen av D illustreras i Figur 1.



Figur 1: Projektionen av D på xy -planet för en tetraeder med sidor av längden 3.

2 Multipelintegraler - rekursionformeln

Notation: För $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ är $\int f(\bar{x}) d\bar{x} = \int \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$.

Sats: Låt $B_n = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n; \|\bar{x}\| \leq 1\}$ (B_n är alltså det n -dimensionella enhetsklotet). Kalla den n -dimensionella volymen av B_n för μ_n , det vill säga är $\mu_n = \int_{B_n} d\bar{x}$. För dessa volymer har vi rekursionsformeln:

$$\mu_1 = 2, \quad \mu_2 = \pi, \quad \mu_n = \frac{2\pi}{n} \mu_{n-2} \quad \forall n \geq 3. \quad (5)$$

Lemma: För att bevisa satsen ovan behövs denna hjälpsats. Låt $r > 0$ och $B_{n,r} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n; \|\bar{x}\| \leq r\}$. Då är $\mu(B_{n,r}) = \mu_n r^n$.

Bevis av lemma: Skala om $\bar{x}$ genom att göra variabelbytet $\bar{x} = r\bar{y}$. För detta variabelbyte är funktionalmatrisen $\frac{\partial(\bar{x})}{\partial(\bar{y})} = rI$ där I är den n -dimensionella enhetsmatrisen. Alltså gäller det att

$$\frac{\partial(\bar{x})}{\partial(\bar{y})} = rI \Rightarrow \frac{d(\bar{x})}{d(\bar{y})} = r^n, \quad (6)$$

$$\mu(B_{n,r}) = \int_{\|\bar{x}\| \leq r} d\bar{x} = \int_{\|\bar{y}\| \leq 1} \frac{d(\bar{x})}{d(\bar{y})} d\bar{y} = \int_{\|\bar{y}\| \leq 1} r^n d\bar{y} = r^n \int_{\|\bar{y}\| \leq 1} d\bar{y} \quad (7)$$

där den sista integralen i ekvation 7 kan kännas igen som volymen μ_n då huruvida variabeln kallas $\bar{y}$ eller $\bar{x}$ inte spelar någon roll då det fortfarande är den n -dimensionella volymen av det n -dimensionella enhetsklotet.

□

Bevis av sats sammanfattat kort: Då beviset till för rekursionformeln är långt så kommer den bara att sammanfattas övergripande här. Till att börja med kan man genom geometri visa att $\mu_1 = 2$ och $\mu_2 = \pi$. För $n \geq 3$ däremot gäller att då $\|\bar{x}\|^2 \leq 1$ så kan vi säga att

$$x_n^2 + x_{n-1}^2 \leq 1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2. \quad (8)$$

Om vi sen skulle fixera alla variabler förutom x_{n-1} och x_n så får vi att projektionen av de andra variablerna blir en cirkelskiva med arean $\pi(1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2)$. Fubini ger då att

$$\mu_n = \dots = \pi \int_{B_{n-2}} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2\right) dx_1 \dots dx_{n-2}. \quad (9)$$

Därefter så använder man metoden med nivåkurvor och ersätter kvadratroten av summan ovan med en funktion $g(\bar{x})$ och får då att integranden i integralen är $h(g(\bar{x}))$ om $h(u) = 1 - u^2$. Volymen $V(u)$ som behövs är volymen av $B_{n,u} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n; g(\bar{x}) \leq u\}$. Lemmat ger då att $V(u) = u^{n-2} \mu_n$ då volymen är den av enhetsklotet $n - 2$ dimensioner och därmed blir $V'(u) = (n - 2)u^{n-3} \mu_n$. Eftersom att $0 \leq g(\bar{x}) \leq 1$ så får vi att

$$\mu_n = \pi \int_0^1 (1 - u^2)(n - 2)u^{n-3} \mu_{n-2} du = \dots = \pi \frac{2\mu_{n-2}}{n}. \quad (10)$$

□

3 Definition av kurvor och ytor

Definition: Låt $a \leq b$. En funktion $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ av klass $\mathcal{C}^k$ kallas en parametriserad och orienterad $\mathcal{C}^k$ -kurva.

Om kurvan startar i en punkt a och slutar i en punkt b är den:

- sluten om $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$
- enkel om $a \leq t_1 < t_2 < b \Rightarrow \mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$

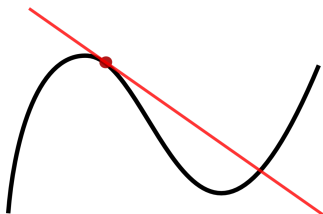
En vanlig kurva, t.ex. $y = x$, kan parametriseras enligt $r_1(t) = (t, t)$, $0 \leq t \leq 1$, då kurvan för alla x -värden i intervallet antar samma y -värde. Men den kan även parametriseras enligt $r_2(t) = (t + 1, t + 1)$, $-1 \leq t \leq 0$, eller $r_3(t) = (\sqrt{t}, \sqrt{t})$, $0 \leq t \leq 1$ då även dessa för alla x -värden i intervallet ger samma y -värde. Mer allmänt kan detta skrivas

$\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{s} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ är olika parametriseringar av samma orienterade $\mathcal{C}^k$ -kurva om $\exists \varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ som är en växande bijektiv $\mathcal{C}^k$ -funktion så att $\mathbf{r}(t) = \mathbf{s}(\varphi(t))$, $\forall t \in [a, b]$.

Definition: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$, kompakt kvadrerbar mängd, $k \geq 0, n \geq 2$. En $\mathcal{C}^k$ -funktion $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ kallas en parametriserad $\mathcal{C}^k$ -yta.

4 Mer om kurvor, dess längd och ytors area

Definition: låt $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en $\mathcal{C}^1$ kurva och $t \in [a, b]$. $\mathbf{r}'(t)$ kallas för hastigheten vid tiden t och $\|\mathbf{r}'(t)\|$ kallas för farten vid tiden t . Om kurvan är en $\mathcal{C}^2$ kurva: $\mathbf{r}''(t)$ kallas för accelerationen vid tiden t .



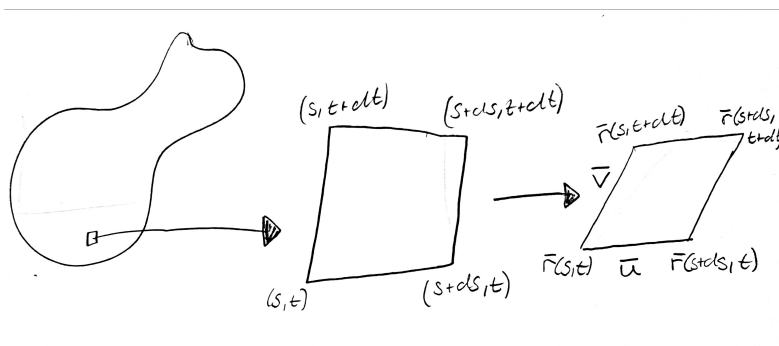
Figur 2: En godtycklig kurva med dess tangent, i en viss punkt, i rött.

Med hjälp av dessa kan vi nu räkna ut längden på en kurva, vilket vi gör genom att först beräkna en infinitesimalt liten del av kurvan som vi sedan integrerar från start- till slutpunkt. Det infinitesimala kurvsegmentet kallas längdelement och betecknas ds . För att hitta ett uttryck för ds utnyttjar vi att längden är infinitesimal, vilket betyder att $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)dt$. $ds = \|d\mathbf{r}\| = \|\mathbf{r}'(t)\| dt$. Kurvans totala längd blir alltså:

$$\int_a^b ds = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt \quad (11)$$

Enligt en sats som bevisats på föreläsning, gäller detta oberoende på orientering och parametrisering.

För att beräkna arean av en tredimensionell yta gör vi på nästan samma sätt fast nu tar vi en infinitesimalt stor rektangel som vi integrerar upp istället för en sträcka, se figur 3.



Figur 3: En infinitesimal rektangel som är en delmängd till en godtycklig yta.

Arean av en rektangel är som känt, sedan linjär algebra, kryssprodukten av basvektorer-na, i detta fall $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Alltså areaelementet $dS = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$. Vi kan enligt bilden uttrycka $\mathbf{u}$, och $\mathbf{v}$ på följande sätt:

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}(s, t) - \mathbf{r}(s + ds, t) \approx -\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} ds, \quad (12)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}(s, t) - \mathbf{r}(s, t + dt) \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} dt. \quad (13)$$

Detta betyder att vi kan skriva arean som

$$\iint_D \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right\| ds dt. \quad (14)$$

5 Skalarprodukt

Sats: Låt $\bar{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\bar{v} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara $\mathcal{C}^1$ -funktioner. Då gäller det att

$$\frac{d}{dt}(\bar{u}(t) \cdot \bar{v}(t)) = \bar{u}'(t) \cdot \bar{v}(t) + \bar{u}(t) \cdot \bar{v}'(t). \quad (15)$$

Fysiktillämpningar: Antag att en partikel med massan m följer en $\mathcal{C}^1$ -kurva $\bar{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Förändring i kinetisk energi $= \frac{m}{2} \|\bar{r}(b)\|^2 - \frac{m}{2} \|\bar{r}(a)\|^2$. Detta kan man med analysens huvudsats skriva om till

$$\int_a^b \bar{F}(t) \cdot \bar{r}'(t) dt. \quad (16)$$

$\bar{F}(t)$ är kraften som verkar på partikeln.

Ofta beror $\bar{F}$ på positionen men inte tiden. Alltså har vi ett statiskt vektorfält.

$\bar{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Då får vi en arbetsintegral eller en kurvintegral:

$$\int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t) dt. \quad (17)$$

Den ger att arbetet kraften utför på partikeln är lika med förändringen i partikelns energi.

6 Fysikalisk användning av kryssprodukt

Sats: Låt $\bar{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\bar{v} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara $u, v \in \mathcal{C}^1$. Då gäller det att

$$\frac{d}{dt}(\bar{u}(t) \times \bar{v}(t)) = \bar{u}'(t) \times \bar{v}(t) + \bar{u}(t) \times \bar{v}'(t). \quad (18)$$

OBS Ordningen är viktig.

Fysik-tillämpning

- **Def 1:** En partikels rörelsemängdsmoment kring origo är $\bar{L} = m(\bar{r} \times \bar{v})$ då $\bar{r}$ är Ortsvektorn och $\bar{v}$ är hastigheten som också kan skrivas som $\bar{r}'$.
- **Def 2:** En partikel följer en centralrörelse kring origo om kraften den upplever alltid är riktad mot origo.

Antag att en partikel med positiv $\bar{r}(t)$ följer centralrörelse kring origo. Då gäller att

$$\bar{L}(t) = m(\bar{r}(t) \times \bar{r}'(t)) \Rightarrow \frac{d}{dt}\bar{L}(t) = m(\bar{r}'(t) \times \bar{r}'(t) + \bar{r}(t) \times \bar{r}''(t)). \quad (19)$$

Vi får per definition av kryssprodukt att

$$\bar{r}'(t) \times \bar{r}'(t) = \bar{0} \Rightarrow \frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{r}(t) \times (m\bar{r}''(t)) \quad (20)$$

blir då $m\bar{r}''(t) = \bar{F}$, enligt Newtons andra lag. Alltså är $\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{r}(t) \times \bar{F}(t)$. Central rörelse ger oss att $\bar{r}$ och $\bar{F}$ är motriktade vilket innebär att $\bar{r} \times \bar{F} = \bar{0}$. Alltså är $\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{0}$, dvs. är rörelsemängdsmomentet konstant.