

MVE035, MVE600 Sammanfattning av LV5 Grupp 5B

Februari 2022

1 Föreläsning 13, vecka 6

1.1 Generaliserade integraler

Om en funktion f växlar tecken kan $\iint_D f \, dx \, dy$ bero på beräkningsmetoden. f kan då delas upp som $f = f^+ - f^-$. Observera att $|f| = f^+ + f^-$, så om $\iint_D |f| \, dx \, dy$ konvergerar måste $\iint_D f^+ \, dx \, dy$ och $\iint_D f^- \, dx \, dy$ konvergera, vilket ger att $\iint_D f \, dx \, dy$ konvergerar. Alltså gäller att absolutkonvergens medför konvergens.

Om $0 \leq g \leq f$ och $\iint_D g \, dx \, dy$ divergerar ger det enligt liknande resonemang som ovan att $\iint_D |f| \, dx \, dy$ också är divergent och därmed att $\iint_D f \, dx \, dy$ är divergent.

1.2 Integral över begränsad mängd

Låt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ och $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara begränsade, och $\Delta \supseteq D$ vara en axelparallell triangel så att $f_D(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ om $\mathbf{x}$ är en utvidgning, och 0 om den inte är det.

Då är $\iint_D f \, dx \, dy = \iint_\Delta f_D \, dx \, dy$ om integralen existerar. Med andra ord finns många möjliga Δ men eftersom Δ inte påverkar D blir slutresultatet detsamma.

Ett lemma säger att om f är kontinuerlig och begränsad på en kvadrerbar mängd D så är f integrerbar. Tanken bakom lemmat är att mängden D kan delas upp i så små delintegraler att mängden får plats mellan två trappfunktioner Φ och Ψ eftersom:

1. Varje ruta helt i D är kontinuerlig per definition.
2. Varje ruta helt utanför D är 0.
3. Rutor som skär randen ∂D har en total area mindre än ϵ eftersom ∂D är en nollmängd.

Om randen till ett kvadrerbart område är styckvis C^1 kan $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiera randens kurva och värdemängd. Om φ är styckvis C^0 kan $\varphi : [a, b] \rightarrow \partial D$ bli surjektivt, och det medför att ∂D ej är en nollmängd. Då fyller randen ett utrymme.

1.3 Trippelintegraler

Trippelintegraler är precis som dubbelintegraler en underklass av multipelintegraler. Volymen kan beräknas med hjälp av trippelintegraler. Låt D vara ett kompakt kvadrerbart område. D kan då ges av:

$$D = \{(x, y, z) | (x, y) \in E, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\} \quad (1)$$

där $E \subseteq \mathbb{R}^2$ är projektionen av D på xy -planet. Vi noterar denna projektion som $\Pi(D) = E$.

Precis som för dubbelintegraler kan vi använda oss av Fubinis sats. Detta går till enligt ekvation 2 och 3.

2 Föreläsning 14

2.1 Multipelintegraler

2.1.1 Notation

Multipelintegraler över n variabler betecknas på samma sätt som för dubbelintegraler och trippelintegraler.

$$\int \cdots \int_D f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

2.1.2 Enhetsklot

Ett exempel på användningen av multipelintegraler är beräkningen av volymen av ett n -dimensionellt enhetsklot. Detta kan beräknas med multipelintegralen:

$$\int \cdots \int_D 1 dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

där $D = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$.

Sats. Volymen μ_n hos det n -dimensionella enhetsklotet kan beskrivas med den rekursiva formeln:

$$\mu_1 = 2, \mu_2 = \pi, \mu_n = \frac{2\pi}{n} \mu_{n-2}$$

För att genomföra beviset används även ett stödlemma. Rekursionsformeln kan lösas och skrivas på en implicit form, men då behöver vi en ytterligare funktion, nämligen gammafunktionen.

2.1.3 Gammafunktionen

Definition.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

Gammafunktionen är en generalisering av fakultet som är kontinuerlig $\forall z \in \mathbb{C}$ där $\operatorname{Re}(z) \neq \mathbb{Z}^-$. Gammafunktionen har följande intressanta egenskaper:

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
2. $\Gamma(n+1) = n!$
3. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (Gaussiska integralen)

Med hjälp av gammafunktionen kan volymen av n -dimensionella enhetsklot beskrivas med formeln:

$$\mu_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

2.2 Mekanik tillämpningar

Dubbel och trippelintegraler kan tillämpas på flera olika sätt inom mekaniken. De främsta användningsområdena är bestämning av massa, medelvärde, masscentrum och tröghetsmoment. Om vi arbetar i $\mathbb{R}^2$ istället för $\mathbb{R}^3$ används dubbelintegraler istället för trippelintegraler i följande ekvationer.

2.2.1 Massa

Om ett föremål ockuperar ett kompakt kvadrerbart område $D \subseteq \mathbb{R}^3$ och har densitet $\rho = \rho(x, y, z)$ kan massan M bestämmas med trippelintegralen:

$$M = \iiint_D \rho(x, y, z) dx dy dz$$

2.2.2 Medelvärde och masscentrum

Medelvärdet av $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ på $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ges av:

$$\begin{aligned}\bar{f}_D &= \frac{1}{\mu} \iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ &= \frac{\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{\iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz}\end{aligned}$$

Masscentrumet är en vektor $\bar{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}$ som beskriver medelvärdet av positionen av föremålets massa.

$$m_x = \frac{1}{M} \iiint_D x \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

m_y och m_z tas fram analogt.

2.2.3 Tröghetsmoment (Ej examinerbart)

Tröghetsmoment kring axeln L kan beskrivas med trippelintegralen:

$$I_L = \iiint_D \rho \ell^2 \, dx \, dy \, dz, \text{ Där } \ell = \ell(x, y, z) \text{ är avståndet till axeln}$$

3 Föreläsning 15, vecka 7

I detta avsnitt behandlas kurvor inom matematiken, både vad gäller egenskaper och tillämpningsområden.

3.1 Matematiska kurvor

En funktion av klass C^k sådan att $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, där $t \mapsto \mathbf{r}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$ sägs vara en parametriserad och orienterad C^k -kurva.

Observera att en funktionsgraf i en dimension är en kurva, men att det motsatta inte nödvändigtvis stämmer.

3.2 Typer av kurvor

Kurvor kan klassificeras utifrån ett antal beskaenheter. I denna föreläsning behandlas slutna och enkla kurvor samt kurvor med båda respektive ingadera egenskaper. Nedan följer en utredning av de typer av kurvor som omnämns.

En sluten kurva är en kurva vars startpunkt och slutpunkt sammanfaller, vilket framgår av figur 1.

Kurvor med egenskapen att inte korsa sig själva sägs vara enkla, se figur 1. Mer formellt gäller att enkla kurvor uppfyller att

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t_1) &\neq \mathbf{r}(t_2) \\ \forall t_1, t_2 \text{ sådana att } a \leq t_1 \leq t_2 < b.\end{aligned}$$



Figur 1: Bilder som åskådliggör hur en sluten, en enkel och en både sluten och enkel kurva kan se ut.

3.3 Kurvor och parameterbyten

Betrakta C^k -kurvorna $\mathbf{r}$ och $\mathbf{s}$ som uppfyller

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{s} &: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

$\mathbf{r}$ och $\mathbf{s}$ sägs utgöra två olika parametriseringar av samma kurva det existerar en växande och bijektiv C^k -funktion φ sådan att

$$\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d].$$

Då gäller att $\mathbf{r}(t) = \mathbf{s}(\varphi(t))$, vilket visar att en given kurva kan parametriseras på fler än ett sätt. Resonemanget kan i själv verket användas för att bekräfta att kurva kan parametriseras på ett oändligt antal sätt. Detta implicerar att en kurva inte kännetecknas av sin parametrisering, varför parameterbyte inte resulterar i erhållandet av en annan kurva.

3.4 Fysikalisk tolkning av kurvor

Det är i allmänhet möjligt att beskriva en partikels tidsberoende förflyttning i rummet med hjälp av en kurva. Detta görs i allmänhet genom att den givna parametern som tiden.

Definition. Låt $\mathbf{r}(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en C^1 -kurva och $t \in [a, b]$, där t betecknar tid.

Då svarar

- $\mathbf{r}'(t)$ mot hastigheten vid tiden t
- $\|\mathbf{r}'(t)\|$ mot farten vid tiden t
- $\mathbf{r}''(t)$ mot accelerationen vid tiden t

3.5 Längden av en kurva

Låt $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en tidsberoende C^1 -kurva, där t betecknar tiden och $t \in [a, b]$. Drag nytta av att $\mathbf{r}'(t)$ är en tangentvektor till punkten $\mathbf{r}(t)$ på kurvan och har positiv riktning, dvs. samma riktning som den givna orienteringen.

Antag vidare att $\mathbf{r}$ beskriver en partikelrörelse och låt dt vara ett infinitesimalt tidsintervall.

Då gäller att normen av vektorn $d\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t)dt$ kommer att motsvara den sträcka ds som partikeln förflyttar sig under tiden dt , dvs.

$$ds = \|d\mathbf{r}'(t)\| = \|\mathbf{r}'(t)\|$$

ds kallas vanligen för kurvans längdelement och används vid beräkning av en kurvas längd, L . Generellt gäller

$$L = \int_a^b ds = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt, \quad (2)$$

vars tolkning består i att farten integreras med avseende på tiden.

Observera att formel 2 ger det välkända resultatet för en endimensionell kurvas längd, $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$.

Sats. Längden av en C^1 -kurva beror inte på kurvans orientering eller parametrisering.

Bevis. Beviset för orientering är trivialt och består i två teckenbyten som ger upphov till det förväntade resultatet.

Att parametriseringen av en kurva är oväsentlig för storleken av kurvans längd visas enkelt genom att låta $\mathbf{r}(t)$ och $\mathbf{s}(u)$ vara två parametriseringar av samma kurva, samt genom att införa den växande och bijektiva funktionen $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$.

Låt längden av den kurva $\mathbf{r}(t)$ beskrivs vara L . Genom att sätta $\mathbf{r}(t) = \mathbf{s}(\varphi(t))$, där $a \leq t \leq b$ ges den nya längden, $\tilde{L}$, av

$$\tilde{L} = \int_c^d \|\mathbf{s}'(u)\| du.$$

Med hjälp av variabelbytet

$$\begin{aligned} u &= \varphi(t) \\ du &= \varphi'(t) dt \end{aligned}$$

underlättas räkningen. Variabelbytet ger att

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= \int_c^d \|\mathbf{s}'(\varphi(t))\| \varphi'(t) dt = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt, \\ \text{ty} \quad \frac{d}{ds} \|\mathbf{s}(\varphi(t))\| &= \frac{d}{ds} \mathbf{r}(t). \end{aligned}$$

□

3.6 Kurvor och skalärprodukt

Sats. Låt $\mathbf{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara funktioner hörandes till klass C^1 . Då ger Leibniz regel att

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)) = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$$

Bevis.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)) &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n u_i(t) v_i(t) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (u_i(t) v_i(t)) = \\ &= \sum_{i=1}^n u_i'(t) v_i(t) + \sum_{i=1}^n u_i(t) v_i'(t) = \\ &= \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t) \end{aligned}$$

□

4 Föreläsning 16, vecka 7

4.1 Ytor

Definiera $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en kompakt kvadrerbar mängd och $k \geq 0$, $n \geq 2$. En C^k funktion $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ kallas en parametriserad C^k yta.

Vi tittar på när $n = 3$, $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(s, t) \rightarrow [x(s, t), y(s, t), z(s, t)]$. Antar att $\mathbf{r} \in C^1$.

4.2 Ytarea

Studera en infinitesimal rektangel. Då är $dA = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|(\mathbf{r}(s+ds, t) - \mathbf{r}(s, t)) \times (\mathbf{r}(s, t+dt) - \mathbf{r}(s, t))\| \approx \|(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}) \cdot ds \times (\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}) \cdot dt\|$
 $\Rightarrow$

$$A = \iint_D dA = \iint_D \|(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}) \times (\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t})\| ds dt$$

4.2.1 Specialfall 1

Om ytan ges av en funktionsgraf $Y = \{(x, y, z) | (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2, z = f(x, y)\}$ är en naturlig parametrisering $\mathbf{r}(x, y) \rightarrow [x, y, f(x, y)]$, vilket ger att

$$\|(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}) \times (\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y})\| = \|[1, 0, f'_x] \times [0, 1, f'_y]\| = \|[-f'_x, -f'_y, 1]\| = \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}.$$

Detta innebär att ytarean är

$$A = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy$$

4.2.2 Specialfall 2

Nivåyta till en funktion $F : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$

$Y = \{(x, y, z) | F(x, y, z) = c, (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2\}$ anta att $F'_z \neq 0$ på hela Y . Den implicita funktionssatsen ger då att det finns en funktion f så att $z = f(x, y)$ och $f'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}$ och $f'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$. Vi kan då använda formeln för ytarea i Specialfall 1, vilket ger

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1 + (\frac{F'_x}{F'_z})^2 + (\frac{F'_y}{F'_z})^2} dx dy \\ &= \iint_D \frac{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}{|F'_z|} dx dy \\ &= \iint_D \frac{\|\nabla F\|}{|F'_z|} dx dy \end{aligned}$$

4.3 Fysik tillämpningar

Nedan tittar vi vidare på tillämpningar av vad vi gått igenom inom fysiken.

4.3.1 Skalarprodukt

Antag att en partikel med massa m följer en C^2 -kurva $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Förändringen i kinetisk energi är då: $\Delta E_K = \frac{1}{2}m\|\mathbf{r}'(b)\|^2 - \frac{1}{2}m\|\mathbf{r}'(a)\|^2$, vilket med hjälp av analysens huvudsats samt reglen för derivering av skalarprodukt (se 3.6) kan skrivas om som

$$\begin{aligned}
\Delta E_K &= \frac{1}{2}m \cdot \int_a^b \frac{d}{dt}(\|\mathbf{r}'(t)\|)^2 dt \\
&= \frac{1}{2}m \int_a^b \frac{d}{dt}(\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)) dt \\
&= \frac{1}{2}m \int_a^b 2(\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t)) dt \\
&= \int_a^b (m\mathbf{r}''(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\
&= \int_a^b (\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)) dt
\end{aligned}$$

där $\mathbf{F}$ är kraften som verkar på partikeln. Ofta beror $\mathbf{F}$ på positionen men inte tiden, t.ex. statiskt vektorfält ($\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$). Då får vi kurvintegral eller arbetsintegralen:

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

Arbetet kraften utför på partikeln är lika med förändringen i partikelns energi.

4.4 Kryssprodukt

Sats. Låt $\mathbf{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara C^1 -funktioner. Leibniz regel ger sedan,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u}' \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}'$$

Bevis. Enligt definitionen för kryssprodukten ges produkten av två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ som $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$. Derivering efter produktregeln ger $\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u}' \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}'$ vilket bevisar satsen.

4.4.1 Tillämpningar av kryssprodukten

Definition. En partikels rörelsemängdsmoment kring en fix punkt är,

$$\mathbf{L} = m \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v})$$

där $\mathbf{r}$ och $\mathbf{v}$ är dess Ortsvektor respektive hastighet.

Definition. En partikel följer en centralrörelse kring en fix punkt om den resulterande kraften på föremålet alltid är riktad mot den fixa punkten.

Antag en partikel med position $\mathbf{r}(t)$ följer en centralrörelse kring origo. Då gäller att $\mathbf{L}(t) = m(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t))$, vilket ger att

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbf{L}(t) &= m(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'(t) + \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)) \\
&= m(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)) \quad (\text{ty } \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}) \\
&= \mathbf{r}(t) \times (m\mathbf{r}''(t)) \\
&= \mathbf{r}(t) \times \mathbf{F}(t).
\end{aligned}$$

Då partikeln enligt antagandet rör sig med centralrörelse får vi att $\mathbf{r}(t)$ och $\mathbf{F}(t)$, vilket ger att $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{F}(t) = \mathbf{0}$. Alltså är $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0}$. Alltså har vi konstant rörelsemängdsmoment $\mathbf{L}$.

Detta får följande konsekvenser:

- $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)) = \mathbf{0}$, derivatan av kryssprodukten är alltså nollvektorn. Detta ger att produkten $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)$ har ett konstant värde $\mathbf{c}$, en fix vektor.
- Partikelns centralrörelse runt systemets referenspunkt sveper ut en area kring samma punkt. Denna area kan beräknas mha. små areasegment $dA = \frac{1}{2} \cdot \|\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)\| dt$ vilket ger att derivatan $\frac{dA}{dt}$ är konstant. Partikeln sveper alltså ut en area med en konstant takt.

Dessa två faktorer ger upphov till Keplers lagar för centralrörelser.