

Tavelpresentation flervariabelanalys grupp 6B

Christersson, Lukas. Gard, Tilda. Thörnblad, Elias.

February 2022

1 Mängder och kurvintegraler

1.1 Definition av sammanhängande mängd

En mängd är sammanhängande om den inte kan delas upp i två icke-tomma delmängder X, Y med $\overline{X} \cap Y \neq \emptyset$ och $X \cap \overline{Y} \neq \emptyset$.

1.2 Definition av bågvis sammanhängande mängd

En mängd $M \subseteq \mathbb{R}^n$ är bågvis sammanhängande om varje par av punkter i M kan förbindas med en C^0 -kurva helt i M .

En bågvis sammanhängande öppen mängd $D \subseteq \mathbb{R}^n$ kallar vi domän.

1.3 Definition av kurvintegral

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en domän, $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow D$ en C^1 -kurva, och $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ett C^0 -vektorfält.

$I = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$ kallas då för kurvintegralen av $\mathbf{F}$ över kurvan $\mathbf{r}(t)$.

Kan tolkas som arbetet som uträttas av $\mathbf{F}$ längs kurvan.

1.4 Sats

SATS:

1. I är oberoende av vilken parametrisering som används.
2. I byter tecken vid orienteringsbyte.

BEVIS:

1. Sambandet mellan $a \leq t \leq b$ och en annan parameter u har formen $t = \varphi(u)$ där φ är en växande C^1 -funktion på ett intervall $[\alpha, \beta]$ med $\varphi(\alpha) = a$ och $\varphi(\beta) = b$. Framställningen av $\mathbf{r}$ i parametern u är då:

$$u \mapsto \mathbf{r}(\varphi(u)), \quad \alpha \leq u \leq \beta.$$

Beräkningen av $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ blir då:

$$\begin{aligned} \int_{u=\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\varphi(u))) \cdot \frac{d}{du} \mathbf{r}(\varphi(u)) du &= \int_{u=\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\mathbf{r}(\varphi(u))) \cdot \mathbf{r}'(\varphi(u)) \varphi'(u) du \\ &= \left[\begin{array}{l} t = \varphi(u) \\ dt = \varphi'(u) du \end{array} \right] = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt. \end{aligned}$$

Alltså kurvintegralen för parametern $a \leq t \leq b$.

2. En parametrisering av kurvan r i motsatt riktning är:

$$u \mapsto \mathbf{r}(a + b - u), \quad a \leq u \leq b,$$

där startpunkt är $r(a + b - a) = r(b)$ och slutpunkt $r(a + b - b) = a$. Vi får då:

$$\begin{aligned} \int_{u=a}^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(a + b - u)) \cdot \frac{d}{du} \mathbf{r}(a + b - u) du &= \left[\begin{array}{l} t = (a + b - u) \\ dt = -du \end{array} \right] \\ &= \int_{t=b}^a \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) (-1)(-dt) = - \int_{t=a}^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt. \end{aligned}$$

1.5 Notation för kurvintegraler

1. γ är en vanlig beteckning av en kurva.
2. Vanligt skrivsätt: $\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.
3. I planet kan vi skriva: $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}, \mathbf{r} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \Rightarrow \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma} P dx + Q dy$.
I rummet skriver vi enligt samma resonemang: $\int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz$.
4. Låt $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ vara C^1 -kurvor där slutpunkten för γ_i är startpunkten för γ_{i+1} och $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_k$. Då är:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

5. Om γ är $-\gamma$ för kurvan med motsatt riktning så är

$$\int_{-\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

6. Notationen $\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ indikerar att γ är en sluten kurva.

1.6 Definition av sluten kurvas orientering

Låt γ vara enkel sluten C^0 -kurva i $\mathbb{R}^2$. γ är positivt orienterad (moturs) om insidan ligger till vänster om färdriktningen. Negativt orienterad (medurs) - till höger.

1.7 Konvention

Om γ enkel sluten kurva betyder $\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ att vi räknar med positiv riktning (moturs).

Värdet är oberoende av start = slut.

2 Konservativa fält

$\mathbf{F}$ är konservativt om $\exists \phi : \mathbf{F} = \nabla \phi$.

2.1 Sats (9.4.2)

SATS: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ (där D är domän) och $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara konservativt med potentialen ϕ . Då får vi att för alla C^1 -kurvor γ i D :

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a}),$$

där $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är start respektive slutpunkt för γ .

BEVIS: Tag C^1 -parametrisering av $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ av γ . Vi vet att resultatet är oberoende av parameter valet.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = [\mathbf{F} \text{ är konservativt} \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla \phi] = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \nabla \phi \cdot \\ \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) dt &= [\text{Kedjeregeln}] = \int_a^b \frac{d}{dt} \phi(\mathbf{r}(t)) dt = \phi(\mathbf{r}(b)) - \phi(\mathbf{r}(a)) = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

FÖLJDSATSER: $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, där $\mathbf{F}$ är konservativt.

- 1) $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ beror endast på start och slut punkt för γ , det vill säga oberoende av väg.
- 2) Om γ är en sluten kurva i $D \Rightarrow \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

2.2 Sats (9.4.3)

SATS: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ (där D är domän) och låt $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara ett C^0 -vektorfält.

Om $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av vägen eller ekvivalent $\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ för varje sluten sluten C^1 -kurva γ i D , då är $\mathbf{F}$ konservativt.

BEVIS: Antag $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av vägen. Vill hitta $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ så $\mathbf{F} = \nabla \phi$ välj $\mathbf{a}$ godtyckligt. Definera $\phi(\mathbf{x}) = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där γ är en godtycklig styckvis C^1 kurva från $\mathbf{a}$ till $\mathbf{x}$.

OBS! ϕ väldefinierad på grund av $\phi(\mathbf{x})$ beror inte på vägen från $\mathbf{a}$ till $\mathbf{x}$.

Vill visa: $\mathbf{F} = \nabla \phi \Leftrightarrow \forall \mathbf{b} \in D$ och $i = 1, \dots, n$ gäller $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(\mathbf{b}) = F_i(\mathbf{b})$. Fixera i och $\mathbf{b}$. $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(\mathbf{b}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(\mathbf{b} + h\mathbf{e}_i) - \phi(\mathbf{b})}{h}$. Låt γ_1 vara godtyckligt styckvis C^1 -kurva från $\mathbf{a}$ till $\mathbf{b}$. Låt $\gamma_{3,h}$ vara raksträckan från $\mathbf{a}$ till $\mathbf{b} + h\mathbf{e}_i$. Låt $\gamma_{2,h} = \gamma_1 + \gamma_{3,h}$, $\phi(\mathbf{b}) = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ och $\phi(\mathbf{b} + h\mathbf{e}_i) = \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \Rightarrow \phi(\mathbf{b} + h\mathbf{e}_i) - \phi(\mathbf{b}) = \int_{\gamma_{3,h}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Parametrisera $\gamma_{3,h} : \mathbf{r}(t) = \mathbf{b} + ht\mathbf{e}_i \Rightarrow \int_{\gamma_{3,h}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt =$

$$= \int_0^1 \begin{bmatrix} F_i \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \cdot ht\mathbf{e}_i dt = h \int_0^1 F_i(\mathbf{r}(t)) dt = h \int_0^1 F_i(\mathbf{b} + hte_i) dt.$$

$$\Rightarrow \frac{\phi(\mathbf{b}+h\mathbf{e}_i)-\phi(\mathbf{b})}{h} = \int_0^1 F_i(\mathbf{b} + hte_i)dt = [\text{medelvärdessatsen}] = (1-0)F_i(\mathbf{b} + h\theta\mathbf{e}_i)$$

där $0 \leq \theta \leq 1$.

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(\mathbf{b}+h\mathbf{e}_i)-\phi(\mathbf{b})}{h} = F_i(\mathbf{b}) \text{ p\aa grund av att } \mathbf{F} \in C^0 \Rightarrow F_i \in C^0.$$

2.3 Sats (9.4.4)

SATS: Om $D \subseteq \mathbb{R}^n$ är domän, $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}$ och $\mathbf{F} \in C^1$ gäller det att $\mathbf{F}$ konservativ $\Rightarrow \mathbf{F}$ virvelfritt.

BEVIS: $\mathbf{F}$ är konservativt och $\mathbf{F} \in C^1 \Rightarrow \exists \phi \in C^2 : \mathbf{F} = \nabla \phi \Rightarrow P = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ och $Q = \frac{\partial \phi}{\partial y} \Rightarrow$
 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$

3 Greens sats

3.1 Sats (9.2.1) Greens sats i $\mathbb{R}^2$

SATS: Låt P, Q vara C^1 -funktioner på en öppen mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ om $D \subseteq \Omega$ kompakt med rand ∂D som utgörs av styckvis C^1 -krivor med positiv orientering är:

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

BEVIS:

Steg 1. Antag D reguljärt i x -led, ska visa:

$$\int_{\partial D} Pdx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy. \quad (1)$$

Låt $D = \cup_{i=1}^n D_i$ där $D_i = \{(x, y) | a_i \leq x \leq b_i, \alpha_i(x) \leq y \leq \beta_i(x)\}$, $\partial D = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ positiv orientering.

Ska visa för varje $i = 1, \dots, n$:

$$\oint_{\partial D} Pdx = - \iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy &= \int_{a_i}^{b_i} \int_{\alpha_i(x)}^{\beta_i(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \\ &= \int_{a_i}^{b_i} [P(x, y)]_{\alpha_i(x)}^{\beta_i(x)} dx = \int_{a_i}^{b_i} P(x, \alpha_i(x)) dx - \int_{a_i}^{b_i} P(x, \beta_i(x)) dx = \\ &= \int_{\gamma_1} Pdx + \int_{\gamma_3} Pdx - \int_{\gamma_2} Pdx - \int_{\gamma_4} Pdx = 0 \end{aligned}$$

p.g.a γ_2 och γ_4 vertikala.

Alltså $-\iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} Pdx = \oint_{\partial D_i} Pdx$, d.v.s ekvation 2.

Summera över alla delområden $\sum_{i=1}^n \oint_{\partial D_i} Pdx = - \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$.

Återstår att visa $\sum_{i=1}^n \oint_{\partial D_i} Pdx = \oint_{\partial D} Pdx$.

Idé: Alla integraler längs inre kanter tas ut; bara integralen längs randen D överlever, vilket implicerar att ekvation 1 gäller.

Steg 2. Om D reguljärt i y -led:

$$\int_{\partial D} Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy. \quad (3)$$

Detta visas på samma sätt som Steg 1.

Steg 3. Om D reguljärt i både x - och y -led ger ekvation 1 + ekvation 3:

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

□

3.2 Sats (9.4.5)

Sats: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara enkelt sammanhängande domän $\bar{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ i ett C^1 - vektorfält. Då gäller $\bar{F}$ virvelfritt $\Rightarrow \bar{F}$ konservativt.

Bevis: Antag

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} \text{ dvs. } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Låt γ vara godtycklig enkel sluten kurva i D . Låt E vara insidan av γ . Ge $\gamma = \partial E$ positiv orientering. D enkelt sammanhängande $\Rightarrow E \subseteq D \Rightarrow \bar{F}$ är en definierad och C^1 på hela E .

Greens sats ger:

$$\oint_{\gamma} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \oint_{\partial E} P dx + Q dy = \iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

$\Rightarrow \bar{F}$ konservativt.

□

4 Tre viktiga fysikaliska exempel som följer av dessa sats- ser och definitioner

4.1 Newtons gravitationslag

Om man sätter M som en massa i origo och m som massan på en andra kropp, där $\bar{r}$ är vektorn mellan kropparna, får man följande ekvation:

$$\bar{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

där $G = 6.67408 \cdot 10^{-11} \left[\frac{m^3}{kg \cdot s^2} \right]$.

Man kan skriva dessa ekvationer komponentvis på följande sätt:

$$\bar{F} = -\frac{GMm}{||\bar{r}||^3}\bar{r}$$

$$\bar{r} = -\frac{GMm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Skalärfältet $\phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ där ϕ definieras som:

$$\phi = \frac{GMm}{||\bar{r}||} = \frac{GMm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

uppfyller $\bar{F} = \nabla \cdot \phi$, vilket visar att $\bar{F}$ är ett konservativt fält.

4.2 Coulombs lag for elektrostatik

Om man sätter Q som en laddning i origo och q som en andra laddning, där $\bar{r}$ är vektorn mellan laddningarna, får man följande ekvation:

$$\bar{F} = \frac{CQq}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

där $C = \frac{1}{4\pi\epsilon}$, och i vakuum är värdet av ϵ sådant att $C = 8,98755 \cdot 10^9 \left[\frac{N \cdot m^2}{C^2} \right]$.

För denna ekvationen krävs statiskt tillstånd. Bortsett från tecknet på skalärfältet är detta i teorin identiskt med Newtons gravitationslag.

Skalärfältet $V : \mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ där V definieras som:

$$V = \frac{-CQ}{||\bar{r}||} = \frac{-CQ}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

uppfyller $\bar{E} = \nabla V$, där $\bar{E} = \frac{CQ}{q} \bar{r} \{ \bar{E} \text{ är det elektriska fältet} \}$, och då ser vi att $\bar{E}$ är ett konservativt fält.

4.3 Biot-Savarts lag för magnetism

Magnetfältet $\mathbb{B}$ som produceras av en konstant ström I i en tunn ledare längs z -axeln (oändligt lång) kan skrivas som följande:

$$\mathbb{B} = \frac{\mu T}{2\pi} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix}$$

där $(x, y) \neq 0$, vilket då betyder att $\mathbb{B}$ är odefinierat vid z -axeln. $\mathbb{B}$ är virvelfritt men inte konservativt.

4.4 Definition av divergens

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara vårt domän. Introducera en funktion $\bar{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ som är ett C^1 -fält. Divergensen av $\bar{F}$ är skalärfältet som skrivs på följande sätt:

$$\text{div}(\bar{F}) = \nabla \cdot \bar{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

4.5 En omformulering av Greens sats

Låt $\bar{G} = \begin{bmatrix} Q \\ -P \\ 0 \end{bmatrix}$, då blir högerledet av Greens sats följande:

$$\iint_D \left(\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} \right) dx dy = \iint_D \nabla \cdot \bar{G} dx dy$$

Låt D^* vara en cylinder med bas D och höjd 1, då kan vi skriva följande:

$$\iint_D \nabla \cdot \bar{G} dx dy = [\text{Fubinis sats}] = \iiint_{D^*} \nabla \cdot \bar{G} dx dy dz$$

4.6 Definition av flöde

Låt $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ vara vårt domän, där $\mathbb{Y} \subseteq \Omega$ är en sluten och styckvis C^1 -yta, och $\bar{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ett C^0 -vektorfält.¹ Flödet av $\bar{F}$ ut genom $\mathbb{Y}$ ges av:

$$\oiint_{\mathbb{Y}} \bar{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$$

där $\hat{\mathbf{N}}$ är enhets normal till $\mathbb{Y}$ som pekar ut.²

¹ Styckvis C^1 -yta innebär att den är sammansatt av $\mathbb{Y}_i$, med C^1 -parametriseringen $\bar{r}_i D_i \rightarrow \mathbb{Y}_i$, där $D_i \subseteq \mathbb{R}^2$ är en kompakt och kvadrerbar mängd. Om $\mathbb{Y}$ är sluten och styckvis C^1 kommer $\mathbb{K}$, där $\mathbb{K} = \text{insida}(\mathbb{Y})$, vara kvadrerbar. Vi får också att $\partial K = Y$, $\mathbb{K} \cup \partial K$ är kompakt, och flödet ut ur $\mathbb{K}$ är flödet ut genom $\mathbb{Y}$.

² Att $\mathbb{Y}$ är sluten innebär att $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Y}$ har två sammanhängande komponenter, en insida och en utsida, där insidan är begränsad.