

Sammanfattning MVE035 vecka 7

Michal Palak

February 2022

1 Gauss' sats

Låt $\mathbb{F} = (F_1, F_2, F_3)$ vara ett C^1 fält definierat i en öppen mängd Ω . Vidare låt K vara en kompakt mängd sådan att $K \subseteq \Omega$, där $K, \Omega \in \mathbb{R}^3$, då gäller att:

$$\iint_{\partial K} \mathbb{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iiint_K (\nabla \cdot \mathbb{F}) dV \quad (1)$$

Där ∂K är randen till K , och $\mathbf{N}$ är normalen som är utåtriktad från K . I vänsterledet integrerar vi flödet F över randen till K , och i höger ledet integrerar vi divergensen av $\mathbb{F}$ över K . Vilket kan tolkas som att den totala flödet av $\mathbb{F}$ ut från ∂K är lika med summan av källor i K .

Låt oss ta Coloumbs lag som ett exempel, där det elektriska fältet från en punktladdning i origo ges av:

$$\mathbb{E} = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon} \hat{\mathbf{r}} \quad (2)$$

Vidare låt K vara området mellan två sfärer S_1 och S_2 med radie R_1 respektive R_2 , där $R_2 > R_1 > 0$. Då är fältet divergensritt i K . Vi använder Gauss sats och får:

$$\iiint_K (\nabla \cdot \mathbb{E}) dV = \iint_{\partial K} \mathbb{E} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_{S_2} \mathbb{E} \cdot \mathbf{N} dS - \iint_{S_1} \mathbb{E} \cdot \mathbf{N} dS \quad (3)$$

Eftersom ekvationen ovan är lika med noll då $\nabla \cdot \mathbb{E} = 0$, får vi att:

$$\iint_{S_1} \mathbb{E} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_{S_2} \mathbb{E} \cdot \mathbf{N} dS = \frac{Q}{4\pi R_2^2 \epsilon} \iint_{S_2} dS = \frac{Q}{4\pi R_2^2 \epsilon} \cdot \text{Area}(S_2) = \frac{Q}{4\pi R_2^2 \epsilon} \cdot 4\pi R_2^2 = \frac{Q}{\epsilon} \quad (4)$$

Alltså är flödet av $\mathbb{E}$ ut från S_1 och S_2 lika, och oberoende av radien.

2 Stokes' sats

Låt $\mathbb{F} = (F_1, F_2, F_3)$ vara ett C^1 fält definierat i en öppen mängd $\Omega \in \mathbb{R}^3$. Om Y är positivt orienterad ystycke i Ω med positivt orienterad ∂Y då gäller att:

$$\oint_{\partial Y} \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_Y (\nabla \times \mathbb{F}) \cdot \mathbf{N} dS \quad (5)$$

Där

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \quad (6)$$

I vissa fall kan Stokes sats användas till att förenkla kurvintegraler genom att istället beräkna ytintegral över ytan med randen ∂Y . Satsen gäller då $\mathbf{N} \times d\mathbf{r}$ pekar mot ytan Y , annars måste man sätta minus i satsen.