Demonstration 7

MVE035/MVE600 - Flervariabelanalys

Hampus Renberg Nilsson, MSc.
Hampus.Renberg.Nilsson@chalmers.se

Våren 2022

Dagens genomgång: 10.11, 10.23, 10.35, 10.54

Uppgift 10.11

Beräkna flödet av vektorfältet

$$\boldsymbol{u} = (x, y, z + 1) \tag{1}$$

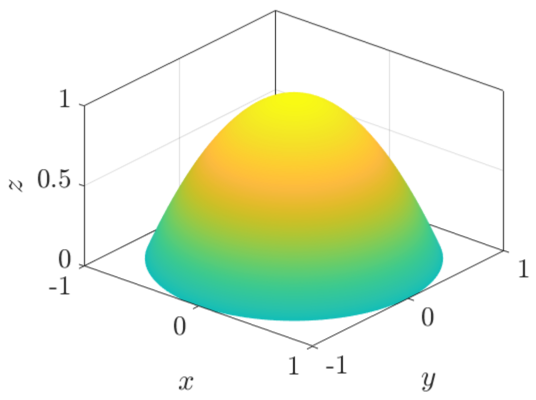
upp (positiv z-koordinat) genom ytan $z = 1 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0$.

Lösning

Låt oss börja med att identifiera området.

- $z \geq 0 \implies$ Vi är i den övre halvan av rummet.
- $z = 1 - x^2 - y^2 \implies$ Ytan ser ut som en upp-och-nedvänd kopp. (Tänk $z = 1 - x^2$ i xz-planet.)

Se skiss i Figur 1.



Figur 1: Ytan.

Vi vill beräkna flödet

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{u} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S. \tag{2}$$

Ytan ges av parameterframställningen

$$\boldsymbol{r} = \left(x, y, 1 - x^2 - y^2\right) \tag{3}$$

och en normal därmed av

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}'_x \times \boldsymbol{r}'_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - (-2x) \\ 0 - (-2y) \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Pekar vår normal åt rätt håll? Ja, ty z-komponenten är positiv.

Egentligen söker vi en enhetsnormal $\hat{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{n}/\left|\boldsymbol{n}\right|$, men denna ska vi sedan multiplicera med $\mathrm{d}S = \left|\boldsymbol{n}\right| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, så vi kan strunta i att normera den.

Flödet beräknas därmed alltså enligt

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int\limits_S \boldsymbol{u} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \,\mathrm{d}S = \iint\limits_S (x, y, z+1) \cdot (2x, 2y, 1) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_S 2x^2 + 2y^2 + z + 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_S 2x^2 + 2y^2 + \left(1 - x^2 - y^2\right) + 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_S x^2 + y^2 + 2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \left(r^2 + 2\right) r \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = 2\pi \int\limits_0^1 r^3 + 2r \,\mathrm{d}r = 2\pi \left(\frac{1}{4} + 1\right) = \frac{5\pi}{2}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Uppgift 10.23

Låt K vara området som definieras av

$$K : 2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 3. \tag{6}$$

Bestäm flödet av fältet

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{r}}{r^2} \tag{7}$$

ut ur området K.

Lösning

Området är området innanför en sfär med radie $\sqrt{3}$, låt oss kalla den sfären Y_1, och utanför en sfär med radie $\sqrt{2}$, låt oss kalla den sfären Y_2.

En enhetsnormal $\hat{\boldsymbol{n}}$ till en sfär ges av $\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ (påminn er om demo 5).

Vi har alltså att flödet ges av

$$\Phi = \int\limits_{\partial K} \boldsymbol{u} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \,\mathrm{d}S = \int\limits_{Y_1} \frac{\boldsymbol{r}}{r^2} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r} \,\mathrm{d}S + \int\limits_{Y_2} \frac{\boldsymbol{r}}{r^2} \cdot \left(-\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) \,\mathrm{d}S = \int\limits_{Y_1 - Y_2} \frac{1}{r} \,\mathrm{d}S. \tag{8}$$

En ytintegral med denna integrand över någon sfär med radie r ges av

$$\int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{r} r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = r \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \sin\theta \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = 2\pi r \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = 4\pi r. \tag{9}$$

Alltså blir våra flödesintegraler

$$\int\limits_{Y_1} \frac{1}{r}\,\mathrm{d}S = 4\pi\cdot\sqrt{3}, \qquad \int\limits_{Y_2} \frac{1}{r}\,\mathrm{d}S = 4\pi\cdot\sqrt{2} \tag{10}$$

och således det totala flödet

$$\Phi = 4\pi\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right). \tag{11}$$

Uppgift 10.35

Låt $\boldsymbol{u}$ vara vektorfältet

$$\boldsymbol{u} = \left(x-3y+z^2, 2x-y^2+z, x^2+y^2-2z^2\right). \tag{12}$$

Beräkna

$$\text{a) } \nabla\cdot\boldsymbol{u}, \quad \text{b) } \nabla\times\boldsymbol{u}, \quad \text{c) } \nabla\boldsymbol{u}, \quad \text{d) } \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}), \quad \text{e) } \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{u}). \tag{13}$$

Lösning

a)

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 1-2y-4z. \tag{14}$$

b)

$$\nabla\times\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}u_x\\ u_y\\ u_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_y u_z - \partial_z u_y\\ \partial_z u_x - \partial_x u_z\\ \partial_x u_y - \partial_y u_x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2y-1\\ 2z-2x\\ 5\end{pmatrix}. \tag{15}$$

c)

$$\nabla\boldsymbol{u} : \text{Odefinierad.} \tag{16}$$

d)

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) = \nabla(1-2y-4z) = (0,-2,-4). \tag{17}$$

e)

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix}\partial_y(5) - \partial_z(2z-2x)\\ \partial_z(2y-1) - \partial_x(5)\\ \partial_x(2z-2x) - \partial_y(2y-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0-2\\ 0-0\\ -2-2\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 4\end{pmatrix}. \tag{18}$$

Stokes sats

Stokes sats säger, under vissa förutsättningar, att

$$\oint\limits_{\partial S} \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int\limits_{S} (\nabla\times\boldsymbol{u})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{19}$$

Eller i ord, att kurvintegralen av en sluten kurva i rummet också kan skrivas om till en dubbelintegral (recall Greens' formel).

Uppgift 10.54

Beräkna med hjälp av Stokes' sats

$$\int_\gamma (3x + z\cos(yz))\,\mathrm{d}y + (y - 2x + y\cos(yz))\,\mathrm{d}z \tag{20}$$

där γ är randen till en yta i planet

$$2x + y + 2z = 5 \tag{21}$$

vars area är 3. Kurvan γ genomlöps i negativ led sedd från origo.

Lösning

Vektorfältet i fråga är

$$\boldsymbol{u} = (0, \underbrace{3x + z\cos(yz)}_{u_y}, \underbrace{y - 2x + y\cos(yz)}_{u_z}). \tag{22}$$

Dess rotation ges alltså av

$$\nabla \times \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \partial_y u_z - \partial_z u_y \\ \partial_z u_x - \partial_x u_z \\ \partial_x u_y - \partial_y u_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + \cos(yz) - yz\sin(yz)) - (\cos(yz) - yz\sin(yz)) \\ 0 - (-2) \\ 3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Kurvintegralen ges alltså av

$$I = \oint_\gamma \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_Y \nabla \times \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_Y (1,2,3) \cdot \frac{(2,1,2)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}}\,\mathrm{d}S = \frac{2+2+6}{\sqrt{9}} \int_Y \mathrm{d}S. \tag{24}$$

Men hur ska vi kunna räkna ut denna ytintegral då? Vi har ju inte ens fått veta hur kurvan kan parametriseras...

... men vi vet dess area, och ytintegralen med integrand 1 över en yta är lika med dess area! Så vi får alltså

$$I = \frac{10}{3} \cdot 3 = 10. \tag{25}$$