Demonstration 8

MVE035/MVE600 - Flervariabelanalys

Hampus Renberg Nilsson, MSc.
Hampus.Renberg.Nilsson@chalmers.se

Våren 2022

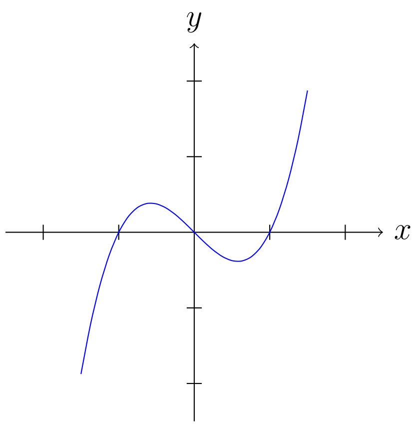
Dagens genomgång: 4.6, 4.15, 4.extra, 4.32

Optimering på kompakta områden

När man söker största och minsta värde av en envariabelfunktion på ett slutet intervall, brukar man normalt sett undersöka var derivatan är noll <u>och</u> randpunkterna. Exempelvis om ni undersöker funktionen

$$f(x) = x(x-1)(x+1) \tag{1}$$

på intervallet $(-1.5, 1.5)$,



så är derivatan noll på två ställen, men extrempunkterna ligger i gränserna.

På samma sätt så kan vi undersöka ett n-dimensionellt områdes inre område med hjälp av dess derivata (gradient), men vi måste också undersöka dess $(n-1)$-dimensionella rand.

Not: Om det finns punkter där derivatan är odefinierad, som t.ex. för $f(x) = |x|$ i $x = 0$, behöver dessa också undersökas.

Uppgift 4.6

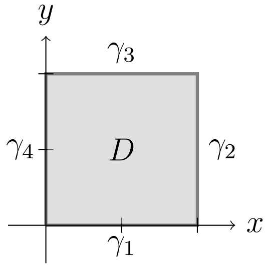
Bestäm största och minsta värdet av

$$f(x, y) = 4x^2y^2 - 2xy^4 - 3x^2 \tag{2}$$

i kvadraten $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$.

Lösning

Området och dess rand ser alltså ut såhär:



där $\partial D = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$.

Det inre området

För D:s inre område undersöker vi var gradienten är noll,

$$\begin{aligned} &\nabla f = \left(8xy^2 - 2y^4 - 6x, 8x^2y - 8xy^3\right) = \mathbf{0} \\ \implies &\begin{cases} 0 = 8xy^2 - 2y^4 - 6x \\ 0 = 8x^2y - 8xy^3 = 8xy\,(x - y^2) \implies x = y^2 \end{cases}. \end{aligned} \tag{3}$$

Vi använder sambandet vi fick ut från den andra ekvationen i den första,

$$8y^4 - 2y^4 - 6y^2 = 6y^2\left(y^2 - 1\right) = 0 \quad \implies \quad y^2 = 1 \quad \implies \quad (x, y) = (1, 1). \tag{4}$$

Så en kandidat till extrempunkt är (1,1).

Första kurvan

Längs kurvan γ_1 gäller att $y = 0$, så randens funktion kan skrivas

$$f_1(x) = f(x, 0) = -3x^2, \quad x \in [0, 2]. \tag{5}$$

Denna funktion har sina extremvärden i $x = 0 \mapsto (x, y) = (0, 0)$ samt $x = 2 \mapsto (x, y) = (2, 0)$.

Andra kurvan

Längs kurvan γ_2 gäller att $x = 2$, så randens funktion kan skrivas

$$f_2(y) = f(2, y) = 16y^2 - 4y^4 - 12, \quad y \in [0, 2]. \tag{6}$$

Vi deriverar och sätter till 0,

$$f_2'(y) = 32y - 16y^3 = 16y(2 - y^2) = 0. \tag{7}$$

Derivatan är alltså noll för $y = \sqrt{2}$ (och även för $y = 0$). Denna funktions extremvärden finns alltså bland punkterna

$$y = \sqrt{2} \mapsto (x, y) = (2, \sqrt{2}), \quad y = 0 \mapsto (x, y) = (2, 0) \quad \text{och} \quad y = 2 \mapsto (x, y) = (2, 2). \tag{8}$$

Tredje kurvan

Längs kurvan γ_3 gäller att $y = 2$, så randens funktion kan skrivas

$$f_3(x) = f(x, 2) = 16x^2 - 32x - 3x^2 = 13x^2 - 32x, \quad x \in [0, 2]. \tag{9}$$

Vi deriverar och sätter till 0,

$$f_3'(x) = 26x - 32 = 0. \tag{10}$$

Derivatan är alltså noll för $x = \frac{32}{26} = \frac{16}{13}$. Denna funktions extremvärden finns alltså bland punkterna

$$x = 0 \mapsto (x, y) = (0, 2), \quad x = 2 \mapsto (x, y) = (2, 2), \quad \text{och} \quad x = \frac{16}{13} \mapsto (x, y) = \left(\frac{16}{13}, 2\right). \tag{11}$$

Fjärde kurvan

Längs kurvan γ_4 gäller att $x = 0$, så randens funktion kan skrivas

$$f_4(y) = f(0, y) \equiv 0. \tag{12}$$

Eftersom vi redan inkluderat origo (från första kurvan) så får vi inga fler kandidater härifrån.

Sammanställning

Vi har nu ett flertal punkter som skulle kunna ge funktionens största resp. minsta värde, så låt oss beräkna funktionsvärdena för dem, se Tabell 1.

Tabell 1: Funktionsvärden för kandidaterna till extrempunkter

x	y	$f(x,y)$
1	1	-1
0	0	0
2	0	-12
2	$\sqrt{2}$	4
2	2	-12
0	2	0
$\frac{16}{13}$	2	$-\frac{256}{13} \approx -19.7$

Funktionens största värde är alltså 4 och dess minsta är $-\frac{256}{13}$.

Uppgift 4.15

Bestäm största och minsta värde av funktionen

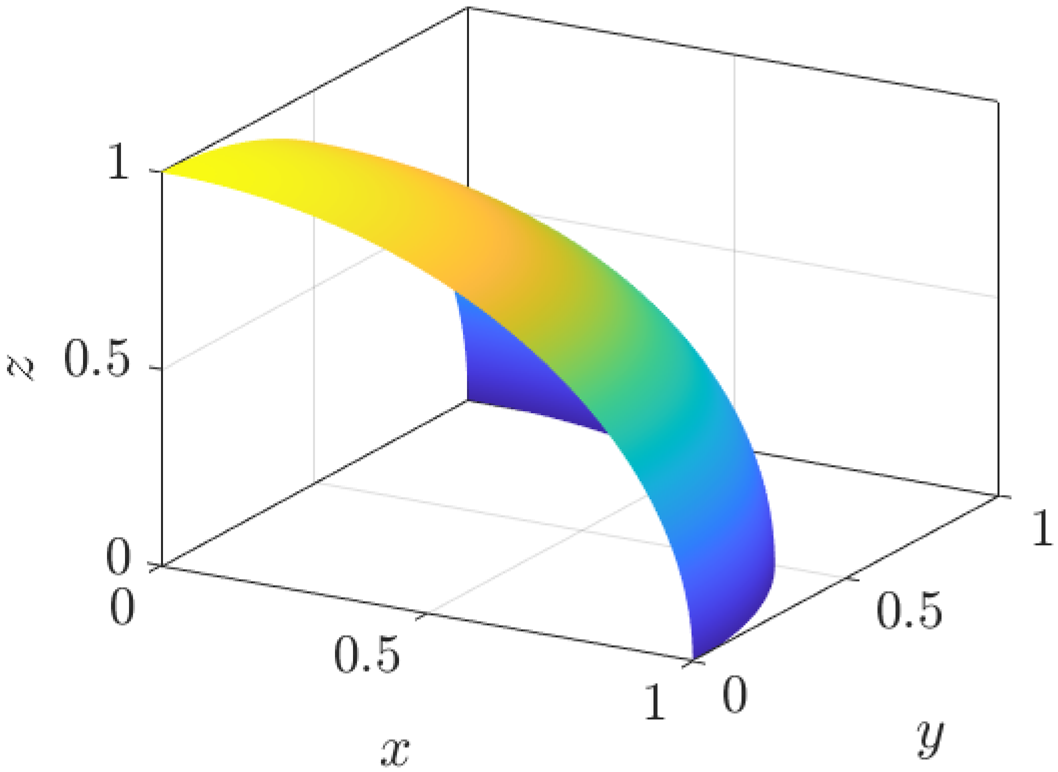
$$f(x, y, z) = xyz + xy \tag{13}$$

i området

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1. \tag{14}$$

Lösning

Området är kroppen mellan origo och ytan skissad i Figur 1.



Figur 1: Den yttersta ytan av kroppen.

Området består således av fyra ytor samt det inre området.

Det inre området

För det inre området

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} < 1, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0, \tag{15}$$

kan vi undersöka var gradienten är noll,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= yz + y \stackrel{?}{=} 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= xz + x \stackrel{?}{=} 0, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= xy \stackrel{?}{=} 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Eftersom $x, y, z > 0$ i detta område kommer dock ingen av de partiella derivatorna någonsin vara noll. Alltså finns ingen potentiell extrempunkt i det inre området.

Området i xz-planet

För området i xz-planet gäller att $y = 0$, $x \in [0, 1]$, $z \in [0, 1]$ och $\sqrt{x^2+z^2} \leq 1$.

Då har vi att $f_1(x, z) = f(x, 0, z) \equiv 0$.

Området i yz-planet

För området i yz-planet gäller att $x = 0$, $y \in [0, 1]$, $z \in [0, 1]$ och $\sqrt{y^2 + z^2} \leq 1$.

Då har vi att $f_2(y, z) = f(0, y, z) \equiv 0$.

Området i xy-planet

För området i xy-planet gäller att $z = 0$, $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$ och $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$.

Då har vi att $f_3(x, y) = f(x, y, 0) = xy$. Denna delfunktion är inte identiskt lika med noll!

Vi ser direkt att $f_3 \geq 0$, ty x och y är båda positiva.

Vi kan dock ej maximera x och y separat, ty deras gränser är beroende av varandra.

Vi kan däremot skriva om f_3 med polära koordinater,

$$g(r, \theta) = f_3(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^2 \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}r^2\sin(2\theta) \tag{17}$$

där $r \in [0, 1], \theta \in [0, \pi/2]$. Då är r och θ oberoende av varandra och vi kan maximera dem var för sig. Vi ser då att g:s största värde ges för $r = 1, \theta = \pi/4$, dvs.

$$g(1, \pi/4) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin\Big(2 \cdot \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{1}{2}. \tag{18}$$

Det krökta området

För det krökta området, skissat i Figur 1, gäller att $x, y, z \in [0, 1]$ och $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$. Här passar sfäriska koordinater sig väl! Vi har då

$$\begin{aligned} h(\theta, \varphi) &= f(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \\ &= \sin\theta\cos\varphi \cdot \sin\theta\sin\varphi \cdot (1 + \cos\theta) \\ &= \underbrace{\sin^2\theta(1 + \cos\theta)}_{u(\theta)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\sin(2\varphi)}_{v(\varphi)} \end{aligned} \tag{19}$$

där $\theta, \varphi \in [0, \pi/2]$.

Funktionen h sitt max-värde då de två delfunktionerna u, v har sina största värden.

Vi ser direkt att $v(\varphi)$ har sitt max-värde för $\varphi = \pi/4$.

Den andra delfunktionen $u(\theta)$ är något klurigare dock, men vi kan derivera och undersöka var derivatan är noll,

$$\begin{aligned} u'(\theta) &= 2\sin\theta\cos\theta(1 + \cos\theta) + \sin^2\theta(-\sin\theta) \\ &= \sin\theta\left(2\cos\theta + 2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \\ &= \sin\theta\left(2\cos\theta + 2\cos^2\theta - \left(1 - \cos^2\theta\right)\right) \\ &= \sin\theta\left(3\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Kan vi faktorisera detta ytterligare?

Ja; att faktorisera $3x^2 + 2x - 1$ kan göras genom att hitta dess nollställen. De ges av

$$x_{\pm} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm 4}{6} \in \left\{\frac{1}{3}, -1\right\}. \tag{21}$$

Alltså kan vi skriva vår u-derivata

$$u'(\theta) = \sin\theta\,(3\cos\theta - 1)\,(\cos\theta + 1) \overset{?}{=} 0. \tag{22}$$

Denna derivata är alltså noll antingen då $\theta = 0$, $\theta = \pi$ eller då $\cos\theta = \frac{1}{3}$.

Den första, $\theta = 0$, är ointressant ty då är $f = 0$. Den andra, $\theta = \pi$, är ogiltig ty $\theta \in [0, \pi/2]$. Den tredje däremot ger oss en extrempunkt!

Notera: Vi behöver inte undersöka den krökta ytans rand ty det har vi redan gjort när vi undersökte de övriga ytorna.

För att beräkna sinus av denna vinkel använder vi

$$\sin^2(\arccos x) = 1 - x^2 \quad\implies\quad \sin^2\left(\arccos\frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3^2}. \tag{23}$$

Vi har alltså att h:s maxvärde är

$$h\left(\arccos\frac{1}{3}, \frac{\pi}{4}\right) = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{9}\right)}_{\sin^2\theta}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{3}\right)}_{1+\cos\theta} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{v(\varphi)} = \frac{8}{9} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{16}{27}. \tag{24}$$

Sammanställning

Vi har hittat de lokala extremvärdena 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{16}{27}$.

Funktionens minsta värde är alltså 0 och dess största $\frac{16}{27}$.

Uppgift 4.extra

Förklara (utan att räkna något) varför funktionen

$$f(x, y) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2} \tag{25}$$

antar både ett största och ett minsta värde i hela $\mathbb{R}^2$. Bestäm sedan dessa värden.

Lösning

Funktionen är väldefinierad och kontinuerlig i hela $\mathbb{R}^2$ eftersom inga (x, y) kan göra nämnaren lika med noll.

Funktionen är vidare lika med noll i både origo och "i oändligheten" (ty nämnaren växer snabbare än täljaren).

Alltså kan inte funktionen växa obegränsat mot $\pm\infty$ och måste således anta ett minsta resp. största värde någonstans i $\mathbb{R}^2$.

För att beräkna dessa, låt oss skriva om funktionen till polära koordinater,

$$g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\cos\theta}{1 + r^2} = \underbrace{\frac{r}{1 + r^2}}_{h(r)} \cdot \cos\theta. \tag{26}$$

Cosinusfunktionen kommer att anta sitt max i $\theta = 0$ och sitt min i $\theta = \pi$.

Funktionen $h(r)$ kommer att vara noll i origo och oändligheten, men anta positiva värden där emellan. Låt oss derivera,

$$h'(r) = \frac{(1+r^2) - r(2r)}{(1+r^2)^2} = \frac{1-r^2}{(1+r^2)^2}. \tag{27}$$

Denna derivata är noll enbart då täljaren är noll, dvs då $r = 1$. Då får vi att h:s max-värde ges av $h(1) = \frac{1}{2}$.

Funktionen f:s max- och min-värden är alltså $g(1, 0) = \frac{1}{2}$ och $g(1, \pi) = -\frac{1}{2}$.

Uppgift 4.32

Bestäm största värdet av funktionen

$$f(x, y, z) = x + y + z \tag{28}$$

på skärningen mellan ytorna

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2 \quad \text{och} \quad x^2 + y^2 - z = 0. \tag{29}$$

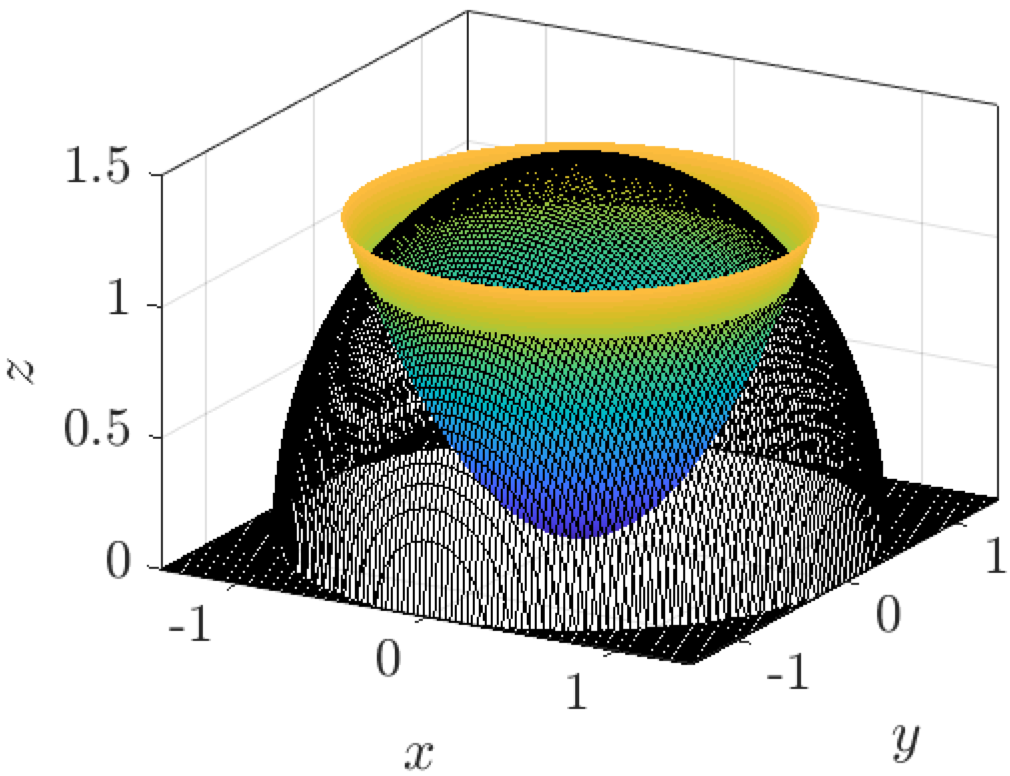
Lösning

Låt oss först förstå vilka områden det gäller.

Det första sambandet $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ ger oss en sfär med radie $\sqrt{2}$.

Det andra sambandet kan vi först tänka på i xz-planet, där har vi $z = x^2$, som vi sedan roterar, så ser vi att området är en kopp med botten i origo.

Ytorna är skissade i Figur 2.



Figur 2: Ytorna.

Först behöver vi identifiera skärningen. Den sker då

$$\begin{cases} z &= x^2 + y^2, \\ z^2 &= 2 - x^2 - y^2 \end{cases} \implies z^2 + z = 2 \implies z = 1. \tag{30}$$

Vi kan alltså uttrycka skärningen med parametriseringen

$$\boldsymbol{r} = (\cos t, \sin t, 1), \quad t \in [0, 2\pi]. \tag{31}$$

Låt oss nu införa

$$\begin{aligned} g(t) &= f(\cos t, \sin t, 1) \\ &= 1 + \cos t + \sin t \\ &= 1 + \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right) \\ &= 1 + \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos t + \cos\frac{\pi}{4}\sin t\right) \\ &= 1 + \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \tag{32}$$

Vi ser att för denna funktion gäller $1 - \sqrt{2} \leq g(t) \leq 1 + \sqrt{2}$, och g beskriver f längs skärningen. Alltså är funktionen f:s största värde på skärningen lika med $1 + \sqrt{2}$.

Not: Summan av två sin-/cos-funktioner med samma frekvens kan alltid skrivas som en sin-/cos-funktion.