

Demonstration T

MVE035/MVE600 - Flervariabelanalys

Hampus Renberg Nilsson, MSc.

Hampus.Renberg.Nilsson@chalmers.se

Våren 2022

Denna genomgång: Utvalda uppgifter från tentorna 2017-03 och 2017-06.

Tenta 2017-03: Uppgift 1

Låt $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{xy}$, $xy \neq 0$.

- a) Bestäm alla kritiska punkter till f och deras karaktär.
- b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till f i punkten $(2, -1)$.

Lösning a)

I en kritisk punkt gäller det att $\nabla f = \mathbf{0}$. Alltså har vi att

$$f'_x = 2x - \frac{2}{x^2y} = 0 \implies x^3y = 1, \quad (1a)$$

$$f'_y = 2y - \frac{2}{xy^2} = 0 \implies xy^3 = 1. \quad (1b)$$

Eftersom båda ovanstående är lika med 1 kan vi sätta dem lika, så får vi

$$x^3y = xy^3 \xrightarrow{xy \neq 0} x^2 = y^2 \implies y = \pm x. \quad (2)$$

Låt oss nu använda detta i Ekvation (1a) så får vi

$$x^3y = \pm x^4 = 1 \implies x^4 = \pm 1 \xrightarrow{(x,y) \in \mathbb{R}} x^4 = 1 \implies \begin{cases} y = x \\ x \in \{-1, 1\} \end{cases} \quad (3)$$

vilket alltså ger oss två kritiska punkter, $(1, 1)$ och $(-1, -1)$.

För att bestämma deras karaktär beräknar vi andraderivatorna,

$$f''_{xx} = 2 + \frac{4}{x^3y} = 2 + \frac{4}{(\pm 1)^3 \cdot (\pm 1)} = 6, \quad (4a)$$

$$f''_{xy} = \frac{2}{x^2y^2} = \frac{2}{(\pm 1)^2 \cdot (\pm 1)^2} = 2, \quad (4b)$$

$$f''_{yy} = 2 + \frac{4}{xy^3} = 2 + \frac{4}{(\pm 1)^3 \cdot (\pm 1)} = 6. \quad (4c)$$

För båda de kritiska punkterna gäller alltså att

- $f''_{xx} = 6 > 0$ och
- $f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 36 - 4 > 0$

vilket innebär att båda är lokala minima.

Lösning b)

Ett Taylorpolynom av andra ordningen ges av

$$P(h, k) = f(a, b) + hf'_x(a, b) + kf'_y(a, b) + \frac{1}{2} (h^2 f''_{xx}(a, b) + 2hk f''_{xy}(a, b) + k^2 f''_{yy}(a, b)). \quad (5)$$

Vi har redan funnit derivatorna, så låt oss sätta in punkten i dem och funktionen,

$$f(2, -1) = 2^2 + (-1)^2 + \frac{2}{2 \cdot (-1)} = 4 + 1 - 1 = 4, \quad (6a)$$

$$f'_x(2, -1) = 2 \cdot 2 - \frac{2}{2^2 \cdot (-1)} = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}, \quad (6b)$$

$$f'_y(2, -1) = 2 \cdot (-1) - \frac{2}{2 \cdot (-1)^2} = -2 - 1 = -3, \quad (6c)$$

$$f''_{xx}(2, -1) = 2 + \frac{4}{2^3 \cdot (-1)} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad (6d)$$

$$f''_{xy}(2, -1) = \frac{2}{2^2 \cdot (-1)^2} = \frac{1}{2}, \quad (6e)$$

$$f''_{yy}(2, -1) = 2 + \frac{4}{2 \cdot (-1)^3} = 2 - 2 = 0. \quad (6f)$$

Så, Taylorpolynomet är alltså

$$P(h, k) = 4 + \frac{9}{2}h - 3k + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}h^2 + hk \right). \quad (7)$$

Tenta 2017-03: Uppgift 2

Låt $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^3$.

- Bestäm en ekvation för tangentplanet till nivåytan $F(x, y, z) = 2$ i punkten $(1, 3, 2)$.
- Motivera varför $F(x, y, z) = 2$ definierar implicit en funktion $z = f(x, y)$ i en omgivning av punkten $(1, 3)$ och bestäm riktningsderivatan av f i punkten $(1, 3)$ och i riktning mot punkten $(2, 5)$.
- Bestäm de största och minsta värdena hos F längs skärningskurvan mellan konen $z^2 = x^2 + y^2$ och planet $x - 2z = 3$.

Lösning a)

Gradienten utgör en normal till tangentplanet. Gradienten är

$$\nabla F = (2x, 2y, -3z^2) \Big|_{(1,3,2)} = (2, 6, -12). \quad (8)$$

En normal $\mathbf{n}$ till ett plan plus en punkt P på planet är allt vi behöver för att bestämma det, och det ges av

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}, \\ (2, 6, -12) \cdot (x, y, z) &= (2, 6, -12) \cdot (1, 3, 2), \\ 2x + 6y - 12z &= 2 + 18 - 24, \\ 2x + 6y - 12z &= -4, \\ x + 3y - 6z &= -2.\end{aligned}\tag{9}$$

Lösning b)

Derivatan m.a.p. z är nollskild i punkten, dvs. $F'_z(1, 3, 2) = -12 \neq 0$, så z definieras implicit av x och y i en omgivning av den punkten enligt Implicita funktionssatsen. Vi har vidare att

$$\nabla f = \left(-\frac{F'_x}{F'_z}, -\frac{F'_y}{F'_z} \right) = \left(-\frac{2}{(-12)}, -\frac{6}{(-12)} \right) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2} \right).\tag{10}$$

Riktningen mot punkten $(2, 5)$ från $(1, 3)$ ges av $\mathbf{u} = (2, 5) - (1, 3) = (1, 2)$. Riktningsderivatan dit ges då av

$$\nabla f \cdot \hat{\mathbf{u}} = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{(1, 2)}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{6} + 1 \right) = \frac{7}{6\sqrt{5}}.\tag{11}$$

Lösning c)

Vi söker max/min av $F(x, y, z)$ under bivillkoren $g_1 = g_2 = 0$ där

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 \quad \text{och} \quad g_2(x, y, z) = x - 2z - 3.\tag{12}$$

Vi använder Lagranges metod och vi får då de 5 ekvationerna:

$$F'_x = \lambda g'_{1,x} + \mu g'_{2,x} \implies 2x = \lambda \cdot (2x) + \mu \cdot 1,\tag{13a}$$

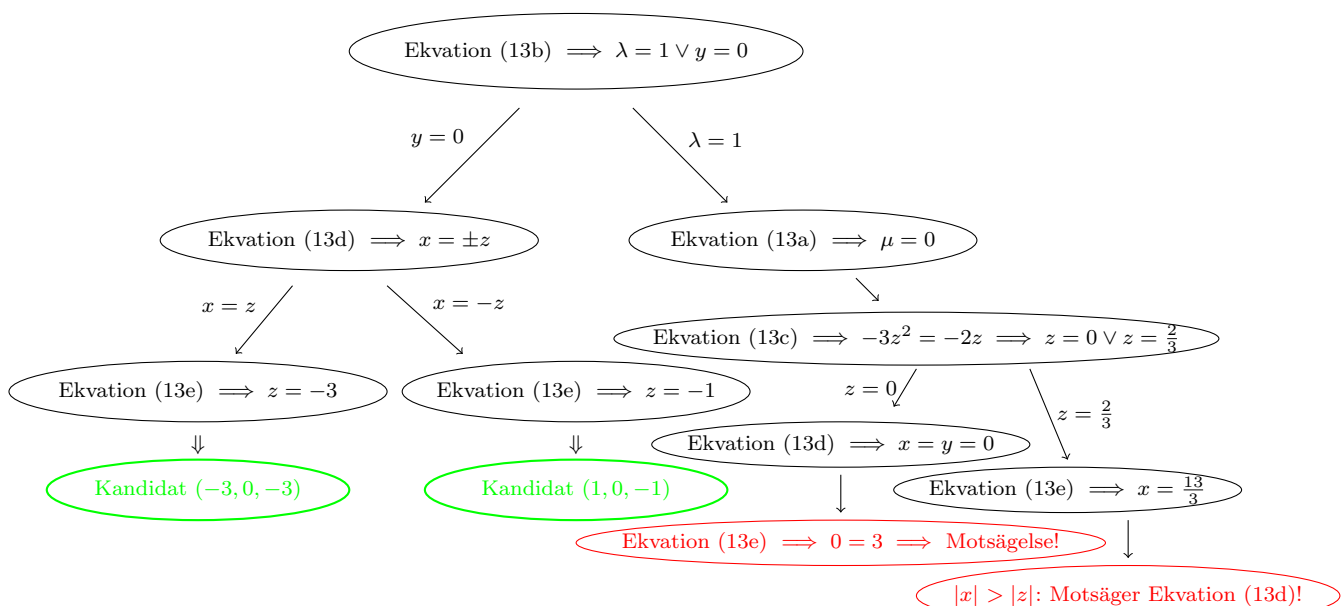
$$F'_y = \lambda g'_{1,y} + \mu g'_{2,y} \implies 2y = \lambda \cdot (2y) + \mu \cdot 0,\tag{13b}$$

$$F'_z = \lambda g'_{1,z} + \mu g'_{2,z} \implies -3z^2 = \lambda \cdot (-2z) + \mu \cdot (-2),\tag{13c}$$

$$g_1 = 0 \implies z^2 = x^2 + y^2,\tag{13d}$$

$$g_2 = 0 \implies x - 2z = 3.\tag{13e}$$

Låt oss strukturera upp lösningsgången för dessa ekvationer,



De enda kandidaterna är alltså $(-3, 0, -3)$ och $(1, 0, -1)$. Där är $F(-3, 0, -3) = 36$ och $F(1, 0, -1) = 2$, vilka alltså måste vara max- och min-värdena.

Tenta 2017-03: Uppgift 3

Beräkna

$$\iint_D e^{y^3} dx dy, \quad (14)$$

där $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$.

Lösning

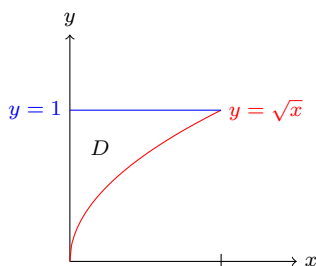
Vi skulle kunna ställa upp integralen som

$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} dy dx, \quad (15)$$

men sjuttsan vilken jobbig integrand vi behöver integrera då!

Finns det något bättre sätt?

Låt oss skissa området,



så ser vi att vi också kan beskriva området som $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 1\}$. Om vi skriver ut integralen för dessa gränser får vi

$$I = \int_0^1 \int_0^{y^2} e^{y^3} dx dy = \int_0^1 y^2 e^{y^3} dy = \frac{1}{3} [e^{y^3}]_0^1 = \frac{1}{3}(e - 1). \quad (16)$$

Tenta 2017-03: Uppgift 4

Låt $Y \subset \mathbb{R}^3$ vara ytan som ges av

$$Y = \left\{ \mathbf{r}(s, t) = \left(s + \frac{t^3}{3} - 1, s - \frac{t^3}{3} - 1, st^2 \right) : 0 \leq s \leq 2, 0 \leq t \leq 3 \right\}. \quad (17)$$

a) Bestäm en funktion $f(s, t)$ så att arean av Y är

$$A = \int_0^3 \int_0^2 f(s, t) ds dt. \quad (18)$$

(OBS! Du behöver ej beräkna ytarean.)

b) Låt γ vara den orienterade kurvan $\{\mathbf{r}(1, t) : 0 \leq t \leq 3\}$. Bestäm längden av γ .

c) Bestäm

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (19)$$

där $\mathbf{F} = (e^{yz} - \pi y^2 \sin(\pi x), xze^{yz} + 2y \cos(\pi x), xye^{yz} + 2z)$.

Lösning a)

Arean av ytan ges av

$$A = \int_Y dS = \int_Y |d\mathbf{S}| = \iint_Y |\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t| \, ds \, dt \quad (20)$$

så funktionen vi söker ges alltså av högerledets integrand, så låt oss beräkna denna integrand!

Vi har

$$\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t^2 \\ -t^2 \\ 2st \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2st - (-t^4) \\ t^4 - 2st \\ -t^2 - t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^4 + 2st \\ t^4 - 2st \\ -2t^2 \end{pmatrix} \quad (21)$$

så alltså ges funktionen $f(s, t) = |\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t|$ vi söker av

$$\begin{aligned} f(s, t) &= \sqrt{(t^4 + 2st)^2 + (t^4 - 2st)^2 + (-2t^2)^2} \\ &= \sqrt{t^8 + 2 \cdot t^4 \cdot 2st + (2st)^2 + t^8 - 2 \cdot t^4 \cdot 2st + (-2st)^2 + 4t^4} \\ &= \sqrt{2t^8 + 4t^4 + 8s^2t^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Lösning b)

Kurvan ges av parametriseringen

$$\mathbf{r}(1, t) = \left(\frac{t^3}{3}, -\frac{t^3}{3}, t^2 \right) \quad (23)$$

och således dess derivata av

$$\mathbf{r}'(1, t) = (t^2, -t^2, 2t). \quad (24)$$

Längden av kurvan ges av

$$l = \int_{\gamma} |d\mathbf{r}| = \int_0^3 |\mathbf{r}'(1, t)| \, dt = \int_0^3 \sqrt{t^4 + t^4 + 4t^2} \, dt = \int_0^3 t\sqrt{2t^2 + 4} \, dt. \quad (25)$$

Vi inför variabelsubstitutionen $u = 2t^2 + 4$, $du = 4t \, dt$ och får

$$l = \frac{1}{4} \int_4^{22} \sqrt{u} \, du = \frac{1}{4} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_4^{22} = \frac{1}{6} (22^{3/2} - 4^{3/2}) = \frac{1}{6} (22\sqrt{22} - 4\sqrt{4}) = \frac{1}{3} (11\sqrt{22} - 4). \quad (26)$$

Lösning c)

Hmm... det är flera snarlika termer i de olika komponenterna av $\mathbf{F}$... kan det vara så att $\mathbf{F}$ är ett potentialfält? Låt oss undersöka!

Om $\mathbf{F}$ är ett potentialfält ska integralen m.a.p. resp. variabel för resp. komponent av $\mathbf{F}$ ge oss dess potential U . Låt oss prova börja med att integrera x -komponenten m.a.p. x ,

$$U = \int F_x dx = xe^{yz} + y^2 \cos(\pi x) + g(y, z). \quad (27)$$

Sedan deriverar vi m.a.p. y och sätter lika med y -komponenten,

$$\frac{\partial U}{\partial y} = xze^{yz} + 2y \cos(\pi x) + g'_y(y, z) = xze^{yz} + 2y \cos(\pi x) \quad (28)$$

vilket ger oss att

$$g'_y(y, z) = 0 \implies g(y, z) = h(z). \quad (29)$$

Låt oss nu derivera U m.a.p. z och sätta lika med z -komponenten,

$$\frac{\partial U}{\partial z} = xye^{yz} + h'(z) = xye^{yz} + 2z \quad (30)$$

vilket ger oss att

$$h'(z) = 2z \implies h(z) = z^2 + C. \quad (31)$$

Alltså har vi att potentialen ges av

$$U = xe^{yz} + y^2 \cos(\pi x) + z^2 + C. \quad (32)$$

I och med att $\mathbf{F}$ alltså är ett potentialfält, räcker det med att kolla potentialens värde i kurvans start- och slutpunkter. För startpunkten får vi $\mathbf{r}(1, 0) = (0, 0, 0)$ och för slutpunkten får vi $\mathbf{r}(1, 3) = (9, -9, 9)$. Kurvintegralen ges alltså av

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(9, -9, 9) - U(0, 0, 0) = 9e^{-81} + 81 \cos(9\pi) + 9^2 = 9e^{-81}. \quad (33)$$

Tenta 2017-03: Uppgift 5

Låt $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 + \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{25 - x^2 - y^2}\}$.

a) Skissa området K .

b) Bestäm flödet ut ur K av vektorfältet $\mathbf{F} = (yz + xz, x^2 + yz, z^2 + y)$.

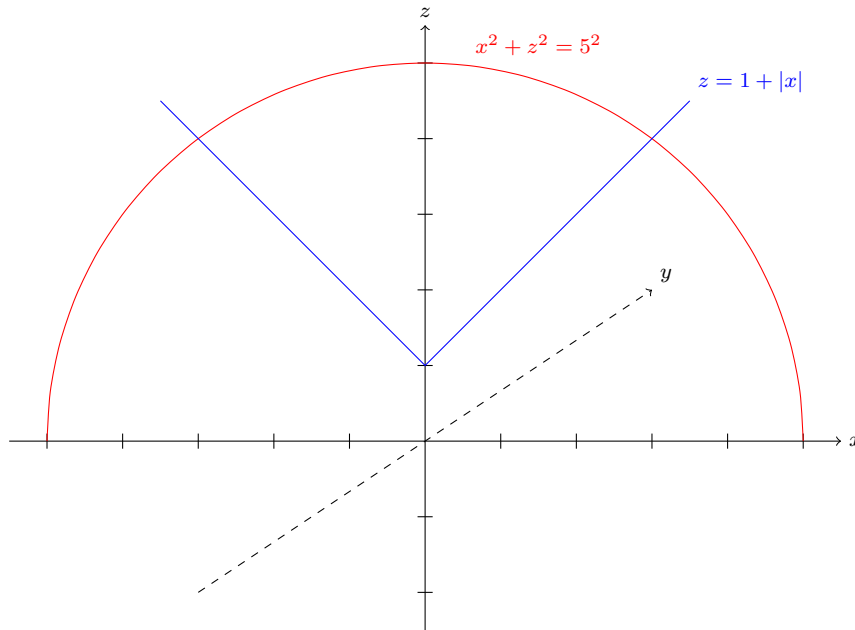
c) Bestäm masscentret för en kropp som ockuperar området K och är gjord av ett homogent material.

Lösning a)

Symmetriskt i xy - låt oss studera formen i xz -planet!

Där gäller att $1 + |x| \leq z \leq \sqrt{25 - x^2}$.

Låt oss skissa dessa,



och sedan är det bara att vi roterar detta runt z -axeln.

Lösning b)

Flödet Φ ut ur K ges av

$$\Phi = \int_{\partial K} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_K \nabla \cdot \mathbf{F} dV \quad (34)$$

enligt Gauss sats. Divergensen är $\nabla \cdot \mathbf{F} = z + z + 2z = 4z$, så Gauss sats passar nog väl här!

Flödet ges alltså av

$$\begin{aligned} \Phi &= 4 \int_K z dV = 4 \iint_{\pi(K)} \int_{1+\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{25-x^2-y^2}} z dz dx dy = 2 \iint_{\pi(K)} [z^2]_{1+\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{25-x^2-y^2}} dx dy \\ &= 2 \iint_{\pi(K)} (25 - x^2 - y^2) - (1 + \sqrt{x^2 + y^2})^2 dx dy \\ &= 2 \iint_{\pi(K)} 25 - x^2 - y^2 - (1 + 2\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2) dx dy \\ &= 4 \iint_{\pi(K)} 12 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 + y^2} dx dy. \end{aligned} \quad (35)$$

För att hitta projektionen i xy -planet sätter vi de två olikheterna lika. För $r^2 = x^2 + y^2$ får vi då

$$1 + r = \sqrt{25 - r^2} \implies 1 + 2r + r^2 = 25 - r^2 \implies r^2 + r - 12 = 0 \quad (36)$$

vars enda lösning $r > 0$ är $r = 3$. Alltså är $\pi(K)$ lika med cirkelskivan $r \leq 3$. Flödet kan alltså vidare beräknas till

$$\begin{aligned} \Phi &= 4 \int_0^3 \int_0^{2\pi} (12 - r^2 - r) r d\theta dr = 8\pi \int_0^3 12r - r^3 - r^2 dr \\ &= 8\pi \left[6r^2 - \frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{3}r^3 \right]_0^3 = 8\pi \left(54 - \frac{1}{4} \cdot 81 - 9 \right) = 8\pi \cdot \frac{99}{4} = 198\pi. \end{aligned} \quad (37)$$

Lösning c)

Låt oss beteckna masscentret $\mathbf{m} = (m_x, m_y, m_z)$.

Av symmetriskäl måste det gälla att $m_x = m_y = 0$. Däremot är $m_z \neq 0$ så den behöver vi beräkna. Den ges av

$$m_z = \frac{\int_K z \, dV}{\int_K dV}. \quad (38)$$

Vi har redan beräknat täljaren (se deluppg. (b)), men vi behöver beräkna nämnaren. Vi har

$$\begin{aligned} V &= \int_K dV = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_{1+r}^{\sqrt{25-r^2}} r \, dz \, d\theta \, dr \\ &= 2\pi \int_0^3 \left(\sqrt{25-r^2} - 1 - r \right) r \, dr \\ &= 2\pi \left(\int_0^3 r\sqrt{25-r^2} \, dr - \int_0^3 r + r^2 \, dr \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Den första delintegralen I_1 beräknas med variabelsubstitutionen $u = 25 - r^2$, $du = -2r \, dr$,

$$I_1 = -\frac{1}{2} \int_0^3 -2r\sqrt{25-r^2} \, dr = -\frac{1}{2} \int_{25}^{16} \sqrt{u} \, du = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_{25}^{16} = \frac{1}{3} (125 - 64) = \frac{61}{3}. \quad (40)$$

Den andra delintegralen I_2 beräknas direkt till

$$I_2 = \int_0^3 r + r^2 \, dr = \left[\frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{3} r^3 \right]_0^3 = \frac{9}{2} + 9 = \frac{27}{2}. \quad (41)$$

Volymen ges alltså av

$$V = 2\pi \left(\frac{61}{3} - \frac{27}{2} \right) = 2\pi \cdot \frac{41}{6} = \frac{41}{3}\pi \quad (42)$$

och därmed ges m_z av

$$m_z = \frac{\frac{1}{4} \cdot 198\pi}{\frac{41}{3}\pi} = \frac{198}{4} \cdot \frac{3}{41} = \dots = \frac{297}{82}. \quad (43)$$

Masscentrum ligger alltså i $(0, 0, 297/82)$.

Tenta 2017-03: Uppgift 6

Beräkna

$$\oint_{\gamma} y \, dx - x \, dy + (z^2 - xy) \, dz \quad (44)$$

där γ är skärningskurvan mellan den paraboliska cylindern $z = y^2$ och den cirkulära cylindern $x^2 + y^2 = 9$, orienterad moturs sett uppifrån längs z -axeln.

Tips: Orienteringen innebär att γ är positivt orienterad som rand till det positivt orienterade stycket av den paraboliska cylindern.

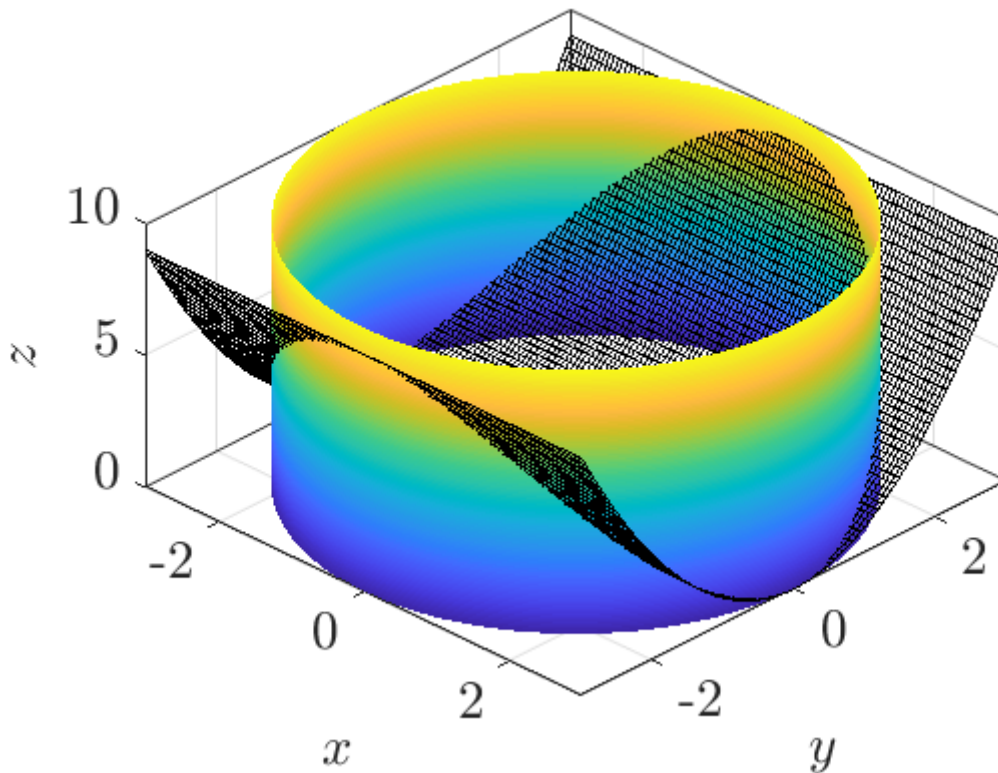
Lösning

Låt oss börja med att identifiera området.

Sambandet $z = y^2$ ger oss som en $y = x^2$ -kurva, fast i yz -planet, som inte förändras när x förändras.

Sambandet $x^2 + y^2 = 9$ ger oss en cylinder med radie 3.

Om vi skissar dessa får vi något likt det vi ser i Figur 1.



Figur 1: De två ytorna.

Vi har alltså vektorfältet $\mathbf{F} = (y, -x, z^2 - xy)$ och kurvintegralen kan skrivas om med Stokes sats till

$$I = \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial Y} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} \quad (45)$$

där Y alltså är ytan som kurvan inringar. Rotationen ges av

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z^2 - xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - 0 \\ 0 - (-y) \\ -1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ -2 \end{pmatrix} \quad (46)$$

Enkelt uttryck för rotationen $\implies$ Stokes passar nog väl!

Ytan kan parametreras med x och y enligt

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, y^2) \quad (47)$$

där x och y ligger i cirkeln $x^2 + y^2 \leq 3^2$. En normal till ytan utgörs alltså av

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 2y \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Alltså kan ytelementet skrivas

$$d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \cdot |\mathbf{n}| dx dy = (0, -2y, 1) dx dy \quad (49)$$

och vår integral då skrivas

$$I = \iint_{\pi(Y)} (-x, y, -2) \cdot (0, -2y, 1) dx dy = -2 \iint_{\pi(Y)} y^2 + 1 dx dy. \quad (50)$$

Projektionen av Y är en cirkel med radie $r \leq 3$, så vi övergår till polära koordinater,

$$I = -2 \int_0^3 \int_0^{2\pi} (\rho^2 \sin^2 \theta + 1) \rho d\theta d\rho = -2 \int_0^3 \rho \left(\int_0^{2\pi} \rho^2 \sin^2 \theta d\theta + \int_0^{2\pi} d\theta \right) d\rho. \quad (51)$$

Nu behöver vi alltså beräkna två delintegraler. Den första ges av

$$I_1 = \rho^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta = \pi \rho^2. \quad (52)$$

Den andra är bara 2π . Den totala integralen är alltså

$$I = -2 \int_0^3 \rho (\pi \rho^2 + 2\pi) d\rho = -2\pi \int_0^3 (\rho^3 + 2\rho) d\rho = -2\pi \left[\frac{1}{4} \rho^4 + \rho^2 \right]_0^3 = \dots = -\frac{117}{2} \pi. \quad (53)$$

Tenta 2017-06: Uppgift 1

Låt $f(x, y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2}$.

a) Bestäm riktningsderivatan för f i punkten $(3,1)$ och i riktning mot punkten $(4,4)$. Bestäm också ekvationen för tangentplanet till funktionsytan $z = f(x, y)$ i punkten $(3,1,4/11)$.

b) Motivera, utan att åberopa derivator av något slag, varför $f(x, y)$ antar både ett största och ett minsta värde i den slutna kvadranten $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$. Bestäm sedan dessa värden (eventuellt med hjälp av derivator nu).

Lösning a

Vi börjar med att ta fram gradienten, vilken finnes genom att derivera m.a.p. båda funktionsvariablerna,

$$f'_x = \frac{1 \cdot (1 + x^2 + y^2) - (x + y) \cdot 2x}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{1 - x^2 + y^2 - 2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} \stackrel{(3,1)}{=} \frac{1 - 9 + 1 - 6}{11^2} = -\frac{13}{121}, \quad (54a)$$

$$f'_y = [\text{symmetri}] = \frac{1 + x^2 - y^2 - 2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} \stackrel{(3,1)}{=} \frac{1 + 9 - 1 - 6}{11^2} = \frac{3}{121}. \quad (54b)$$

Riktningen från $(3,1)$ till $(4,4)$ ges av $\mathbf{u} = (4,4) - (3,1) = (1,3)$. Riktningsderivatan ges av storleken av gradienten projicerad på riktningsvektorn *normerad*, dvs.

$$\nabla f \cdot \hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{121}(-13, 3) \cdot \frac{(1, 3)}{\sqrt{10}} = \frac{-13 + 9}{121\sqrt{10}} = -\frac{4}{121\sqrt{10}}. \quad (55)$$

Tangentplanets ekvation lyder i allmänhet

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0). \quad (56)$$

Punkten (x_0, y_0, z_0) är given i uppgiften och vi har redan beräknat derivatorna, så det är bara att stoppa in:

$$\begin{aligned} z - \frac{4}{11} &= -\frac{13}{121}(x - 3) + \frac{3}{121}(y - 1), \\ \frac{13}{121}x - \frac{3}{121}y + z &= \frac{4}{11} + \frac{39}{121} - \frac{3}{121}, \\ 13x - 3y + 121z &= 44 + 39 - 3 = 80. \end{aligned} \quad (57)$$

Lösning b

Vi ser snabbt att $f = 0$ i både origo och "i oändligheten", att $f \geq 0$ samt att f saknar singulära punkter. Alltså är 0 minsta värdet och f måste anta ett största värde.

Hur hittar vi största värdet då?

För det inre området kan vi undersöka var $\nabla f = \mathbf{0}$, men vi behöver även undersöka områdets rand, dvs. x - och y -axlarna.

Det inre området

Vi kan använda de tidigare härledda derivatorna för gradienten. De är enbart noll då deras täljare är noll, så vi har

$$1 - x^2 + y^2 - 2xy = 0, \quad (58a)$$

$$1 + x^2 - y^2 - 2xy = 0 \quad (58b)$$

vilket ger oss, om vi lägger ihop ekvationerna, att

$$2 - 4xy = 0 \quad \implies \quad xy = \frac{1}{2} \quad \xrightarrow{(58a)} \quad x^2 = y^2 \quad \implies \quad x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (59)$$

Funktionsvärdet i denna punkt är

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{2/\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (60)$$

Randen

Eftersom $f(y, x) = f(x, y)$ så räcker det att vi kollar en av axlarna. Låt oss införa en delfunktion för randen,

$$g(x) = f(x, 0) = \frac{x}{1 + x^2}. \quad (61)$$

Denna funktion g är noll i origo och "i oändligheten", så dess maximum måste ligga däremellan. Vi deriverar g och sätter till noll,

$$g'(x) = \frac{1 \cdot (1 + x^2) - x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} \quad (62)$$

vilken endast är noll då täljaren är noll, dvs

$$1 - x^2 = 0 \quad \implies \quad x = 1. \quad (63)$$

Funktionsvärdet i denna punkt är $g(1) = \frac{1}{2}$.

Sammanställning

Eftersom $\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$ är det största värdet $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (och det minsta var som sagt 0).

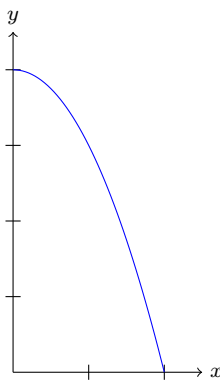
Tenta 2017-06: Uppgift 3

a) Beräkna

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} dy dx \quad (64)$$

Lösning a)

Svår integrand (att integrera m.a.p. y först)! Kan den bli lättare om vi omformulerar gränserna? Låt oss skissa gränserna!



Vi har att

$$y = 4 - x^2 \quad \implies \quad x = \sqrt{4 - y} \quad (65)$$

så vi kan omformulera gränserna så att integralen är

$$\begin{aligned} I &= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{xe^{2y}}{4-y} dx dy = \int_0^4 \frac{e^{2y}}{4-y} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\sqrt{4-y}} dy = \int_0^4 \frac{e^{2y}}{4-y} \frac{4-y}{2} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 e^{2y} dy = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2y} \right]_0^4 = \frac{1}{4} (e^8 - 1). \end{aligned} \quad (66)$$