

Tavelpresentation grupp 6C

Karl Niklasson, Kelmend Muriqi, Anders Frick,
Adam Berger, Felix Persson, Carl Hoogervorst

February 2022

1 Kurvintegraler

1.1 Definition (Bågvis sammanhängande mängd)

En mängd $M \subseteq \mathbb{R}^n$ är bågvis sammanhängande om varje par av punkter i M kan förbindas med en C^0 -kurva helt i M .

1.2 Definition (Domän)

En bågvis sammanhängande öppen mängd $D \subseteq \mathbb{R}^n$ kallas domän.

1.3 Definition (Kurvintegral)

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en domän, $\vec{F}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ en C^1 -kurva och $\vec{F}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ett vektorfält.

$$I = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d}{dt} \vec{r}(t) dt \quad (1)$$

kallas kurvintegralen av F längs kurvan.

1.3.1 Sats

- (i) I är oberoende av parametriseringen.
- (ii) I byter tecken vid orienteringsbyte.

1.4 Sats (Jordans Huvudsats)

Låt γ vara en enkel sluten C^0 -kurva i $\mathbb{R}^2$. Då består $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ av exakt två sammanhängande komponenter. Komponenterna kallas insida(begränsad) och ut-sida(obegränsad) och har γ som rand.

Definiton: Låt γ vara enkel sluten kurva i $\mathbb{R}^2$, γ är positivt orienterad(moturs) om insidan ligger till vänster om färdriktningen. Negativt orgienterad(medurs) om insidan ligger till höger.

Konvention: Om γ enkel sluten skrivs detta som i (2), det betyder även att vi räknar med positiv orientering. Värdet är oberoende av vart på kurvan man börjarräkna sålänge man går i rätt riktning. start = slut. Man kan förtydliga om γ är positivt eller negativt orienterad genom att rita en cirkel på integraltecknet med en pil som pekar antingen moturs(positivt) eller medurs(negativt)

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2)$$

Beräkning av kurvintegraler.

(i) Parametrisering av kurvan och envariabelintegration, uppdelning i C^1 -stycken är oftast nödvändigt.

(ii) Utnyttja potentialer för konservativa fält (sats 9.4.2).

(iii) Greens sats (sats 9.2.1)

(i + ii) går bra i godtycklig dim, (iii) går endast i n=2

2 Konservativa fält och potentialer

2.1 Definition

Vektorfältet $\vec{F} = (P, Q)$ sägs vara ett *potentialfält* eller *konservativt* fält i $D \subseteq \mathbb{R}^n$ om det finns en C^1 -funktion ϕ i D sådan att $\nabla\phi = \vec{F}$. Då kallas ϕ *potential* till $\vec{F}$.

2.2 Sats

Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara domän och $\vec{F}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Om fältet är konservativt med potential ϕ gäller för varje C^1 -kurva γ i D :

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(\vec{b}) - \phi(\vec{a}) \quad (3)$$

där $\vec{a}$ och $\vec{b}$ är start respektive slut för γ . Man kan se detta som en generalisering utav instoppningsformeln från envariabelanalysen. Se Persson-Böiers sida 346 för beviset för denna sats.

Detta leder till ett flertal viktiga följder. Genom att studera formeln inser man att om start- och slutpunkten är samma kommer kurvintegralen vara 0, ty $\phi(\vec{a}) - \phi(\vec{a})$ är trivialt lika med 0. Vidare är kurvintegraler i potentialfält helt oberoende av vägen. Det är endast start- respektive slutpunkt som har någon betydelse. Energin i ett konservativt fält bevaras, konserveras. Därav namnet. Gravitationsfältet är ett exempel på ett konservativt fält.

2.2.1 Exempel 1

Avgör om följande fält är konservativt.

$$\vec{F}(x, y) = (y + 2x, x) \quad (4)$$

Sätt $P = y + 2x$ och $Q = x$. För att undersöka detta så söker vi en potentialfunktion ϕ som satisfierar följande ekvationssystem. I vårt fall erhålles ekvationssystemet

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = y + 2x & (i) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = x & (ii) \end{cases} \quad (5)$$

Integrera (ii) så fås $\phi(x, y) = xy + f(x)$, där $f(x)$ är en godtycklig funktion av x . Derivering av ϕ leder till

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = y + f'(x) = y + 2x \iff f(x) = x^2 + C \quad (6)$$

Den sökta potentialfunktionen blir således

$$\phi(x, y) = xy + x^2 + C \quad (7)$$

och vi kan konstatera att fältet är ett konservativt sådant.

2.3 Definition - virvelfritt

Låt $\mathbf{F} = (P, Q)$ vara C^1 -vektorfält i planet. Fältet kallas *virvelfritt* om

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (8)$$

2.4 Sats 2.3

Antag att fältet $\mathbf{F} = (P, Q)$ är konservativt och har potentialfunktionen $U \in C^2(D)$. Då gäller:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (9)$$

för $(x, y) \in D$. Det är viktigt att inse att detta är en implikation och ger att ett konservativt fält också är virvelfritt. Ett fält där ekvation(8) behöver då inte nödvändigtvis vara konservativt. Är derivatorna inte lika går det direkt att dra slutsatsen att fältet inte är konservativt.

Det är inte konstigt att satsen inte räcker för att påvisa att ett fält är konservativt. Det är för att villkoret är en typisk lokal egenskap hos fältet medans att fältet skulle vara konservativt i hela dess definitionsmängd är av en global karaktär.

2.5 Definition - bågvis sammanhängande

En mängd kallas bågvis sammanhängande om det finns en kurva, $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ och $\gamma \in C^0$, för varje par av punkter, x och y s.a. $\gamma(a) = x$ och $\gamma(b) = y$

2.6 Definition enkelt sammanhängande mängd

En öppen mängd, D , är enkelt sammanhängande om D både är bågvis sammanhängande och om varje enkel sluten kurva, γ i D angränsar ett område, E , som helt består av punkter i D . Enklare uttryckt betyder det att mängden är saknar "hål" och är bågvis sammanhängande.

2.7 Sats 2.4

Om vektorfältet, $\mathbf{F} = (P, Q)$, uppfyller kravet kring virvelfrihet:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

för $(x, y) \in D$ och att D är en enkelt sammanhängande mängd så ger det att $\mathbf{F}$ kommer ha potential i D .

2.8 Bevis för sats 2.4

Enligt satsen som beskriver att i ett konservativt fält så är kurvintegralen oberoende av vägen så om vi kan bevisa att:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

för varje sluten kruva, γ , i D som är en öppen sammanhängande mängd i planet så kommer $\mathbf{F}$ vara konservativ i D . I detta bevis betraktar vi inte kurvor som skär sig själva.

Eftersom D saknar hål kommer γ avgränsa ett område, E , som helt ligger i D . Vi kommer därför kunna använda Greens formel med $\partial E = \gamma$, vilket ger:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma} Pdx + Qdy = \pm \iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \pm \iint_E 0 dx dy = 0$$

Vilket avslutar beviset.

3 Greens Formel

Ett okomplicerat område D , har en rand ∂D som kan uppfattas som en kurva, eller flera kurvbitar. Om det inte specificeras så är kurvan orienterad på så sätt att området D ligger till vänster om kurvan.

Nu ger vi en formel som knyter samman kurvintegralen med en viss dubbelintegral över området.

3.1 Sats

Låt P och Q vara två C^1 -funktioner definierade i en öppen mängd Ω i planet. Om det kompakta delområdet D av Ω har en rand ∂D som består av en eller flera styckvis C^1 -kurvor och som är positivt orienterad så är

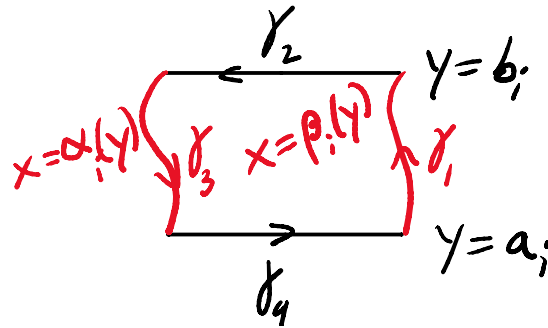
$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \quad (10)$$

3.2 Bevis

Steg 1: Antag att D reguljärt i y -led, så ska vi visa att

$$\int_{\partial D} Qdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy. \quad (11)$$

Låt $D = \cup_{i=1}^n D_i$ där $D_i = \{(x, y) | \alpha_i(y) \leq x \leq \beta_i(y), a_i \leq y \leq b_i\}$



Då är $\partial D = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ positivt orienterad. Vi ska nu visa för varje $i = 1, \dots, n$ att

$$\oint_{\partial D_i} Qdx = \iint_{D_i} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy. \quad (12)$$

Tag högerledet som är

$$\begin{aligned} \iint_{D_i} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy &= \int_{a_i}^{b_i} \int_{\alpha_i(y)}^{\beta_i(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_{a_i}^{b_i} [Q(x, y)]_{\alpha_i(y)}^{\beta_i(y)} dy = \\ &= \int_{a_i}^{b_i} Q(\beta_i(y), y) dy - \int_{a_i}^{b_i} Q(\alpha_i(y), y) dy = \int_{\gamma_1} Qdy + \int_{\gamma_3} Qdy. \end{aligned} \quad (13)$$

Eftersom γ_3 går uppifrån ner så byter integralen tecken. Det är även så att $\int_{\gamma_2} Qdy = \int_{\gamma_4} Qdy = 0$ eftersom γ_2 och γ_4 är horisontella.

Alltså

$$\iint_{D_i} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} Qdy = \oint_{\partial D} Qdx. \quad (14)$$

Om vi nu summerar över alla delområden så får vi

$$\sum_{i=1}^n \oint_{\partial D_i} Q dy = \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy \quad (15)$$

kvar återstår då att

$$\sum_{i=1}^n \oint_{\partial D_i} Q dy = \int_{\partial D} Q dy. \quad (16)$$

Integralerna längs dem inre kanterna kommer att ta ut varandra och då har vi visat att ekvation 11 gäller.

Steg 2: Om D reguljärt i x -led, visa att

$$\int_{\partial D} P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \quad (17)$$

på samma sätt.

Steg 3: Om D reguljärt i x - och y -led då ger ekvation 11 + 17:

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (18)$$

□

4 Tillämpningar av Greens formel

Låt D vara ett område i planet och betrakta kurvintegralen

$$\int_{\partial D} -y dx = \int_{\partial D} -y dx + 0 dy \quad (19)$$

vilket med Greens formel kan skrivas om till

$$\int_{\partial D} -y dx + 0 dx = \iint_D -\left(\frac{\partial}{\partial y}(-y) - \frac{\partial}{\partial x}(0)\right) dx dy = \iint_D dx dy = \mu(D) \quad (20)$$

där $\mu(D)$ är arean av D . Likheten är likadan för x , det vill säga

$$\mu(D) = \int_{\partial D} x dy \quad (21)$$

Genom addition av integralerna i (19) och (20) kan arean enkelt bestämmas genom

$$\begin{aligned} \mu(D) + \mu(D) &= \int_{\partial D} -y dx + \int_{\partial D} x dy \\ 2\mu(D) &= \int_{\partial D} -y dx + x dy \\ \mu(D) &= \frac{1}{2} \int_{\partial D} -y dx + x dy \end{aligned} \quad (22)$$

4.1 Exempel på areabestämning

Uppgift 9.24 i övningsboken.

Beräkna arean av området mellan x-axeln och cykloidbågen

$$\begin{cases} x = t - \sin(t) \\ y = 1 - \cos(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (23)$$

där en cykloidbåge är en kurva bestående av spåret från en fix punkt på en rullande cirkel. Bågen är inte sluten så därför måste ett linjestycke γ läggas till. Det omslutna området beskrivs då $\partial D + \gamma$ och den totala arean $\mu(D) + \mu(\gamma)$. Eftersom γ är ett linjestycke rakt i x-led är y och dy 0. Dess bidrag beräknas då genom

$$\mu(\gamma) = \int_{\gamma} dx = \int_0^{2\pi} 1 - \cos(t) dt = 0 \quad (24)$$

Enligt den framtagna ekvationen ovan kan arean här lätt beräknas genom att använda

$$\mu(D) + \mu(\gamma) = \frac{1}{2} \int_{\partial D + \gamma} -y dx + x dy \quad (25)$$

Givet parametrarna kan dx och dy enkelt bestämmas

$$\begin{cases} x = t - \sin(t) \\ y = 1 - \cos(t) \end{cases} \implies \begin{cases} dx = (1 - \cos(t)) dt \\ dy = \sin(t) dt \end{cases} \quad (26)$$

Insättning i formeln ger

$$\begin{aligned} \mu(D) &= \frac{1}{2} \int_{\partial D + \gamma} -(1 - \cos(t)) \cdot (1 - \cos(t)) + (t - \sin(t)) \cdot \sin(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{2\pi}^0 (t \cdot \sin(t) + 2\cos(t) - 2) dt \\ &= \frac{1}{2} [3\sin(t) - t \cdot \cos(t) - 2t]_{2\pi}^0 \\ &= \frac{1}{2} ((0) - (3 \cdot 0 - 2\pi \cdot 1 - 2 \cdot 2\pi)) = 3\pi \end{aligned}$$

vilket är arean för det beskrivna området.