

Taveluppgift

August Hjelström, Johan Moreau, Axel Borgvall, Arvid Jansson Brännsman

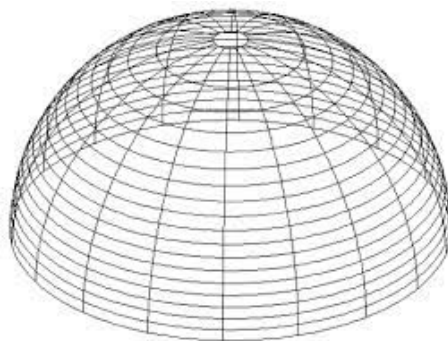
March 2022

1 Gauss sats

Antag att $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ är ett C^1 -fält som är definerat på en öppen mängden D i $\mathbb{R}^3$. Ett kompakt område K har randen ∂K som består av begränsat antal C^1 -ytor med en normal $\hat{\mathbf{N}}$. Då följer

$$\iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \quad (1)$$

vilket är Gauss sats som används för att beräkna flödet ut ur en kropp eller genom en C^1 -yta. För detta krävs dock ibland att man adderar en eller flera C^1 -ytor för att innesluta en volym. Väljer man den adderade ytan smart blir uträkningen lättare när man sedan subtraherar den adderade ytan igen.



Figur 1: $D :=$ Enhetssfären, $0 \leq z$

Exempel 1

Vill vi beräkna flödet ur ytan från fältet $\mathbf{F}$ kan följande uppställning göras där ytan $K := x^2 + y^2 \leq 1$

$$\iint_D \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iiint_H \nabla \cdot \mathbf{F} dV - \iint_K \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \quad (2)$$

2 Tillämpningar av Gauss sats inom fysik

Gauss sats används ofta inom elektromagnetism vid diverse beräkningar.

2.1 Maxwells ekvationer

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

En simpel och bra början för fysikaliska tillämpningar som säger att det inte finns magnetiska monopoler utan det finns alltid två poler som är varandras motsats.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (4)$$

där ρ och ϵ är laddningstätheten respektive permittiviteten. På integralform blir detta

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \oint_D \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \frac{Q_{enc}}{\epsilon} \quad (5)$$

Vilket följer av colombs lag för en punktladdning där vi beräknar flöde genom en sfär

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (6)$$

då $\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{r}}$ och mantelarean $dS = 4\pi r^2$ följer

$$\oint_D \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \oint_D \frac{Q_{enc}}{4\pi\epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} 4\pi r^2 = \frac{Q_{enc}}{\epsilon} \quad (7)$$

3 Stokes sats

Vid beräkning av en kurvintegral kan det vara lättare att beräkna ytintegralen som kurvan innesluter. Kurvan innesluter oändligt många ytor så man kan lätt tänka sig att den kan väljas smart för en enkel integral. Lyckligtvis finns det en sats som säger just detta.

Låt $F = (F_1, F_2, F_3)$ vara ett C^1 -fält som är definerat i en öppen mängd D i $\mathbb{R}^3$. Låt Y vara en positivt orienterad yta i D och beteckna dess rand ∂Y . Då gäller

$$\iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \oint_{\partial Y} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (8)$$

Då beviset är mycket komplicerat visar vi ett förenklat bevis då ytan kan skrivas $z = f(x, y)$ där f är C^2

Från antagandet följer att $dz = \frac{\partial z}{\partial y} dy + \frac{\partial z}{\partial x} dx \implies \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} =$

$$F_1 dx + F_2 dy + F_3 \left(\frac{\partial z}{\partial y} dy + \frac{\partial z}{\partial x} dx \right)$$

Vi kan nu tillämpa Greens sats

$$\oint_{\partial Y} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_Y \left(\frac{\partial(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x})}{\partial x} - \frac{\partial(F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y})}{\partial y} \right) dx dy$$

(9)

Med hjälp av kedjeregeln, produktregeln och Clairauts sats kan integranden skrivas om som

$$\left(-\frac{\partial F_3}{\partial y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \left(-\frac{\partial F_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \quad (10)$$

med enhetsnormalen och ytelementet $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{N}}dS = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, 1 \right)$ blir beviset fulländat då.

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}dS = \left(-\frac{\partial F_3}{\partial y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \left(-\frac{\partial F_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \quad (11)$$

Stokes sats tillämpas tillexempel inom elektromagnetism där två av Maxwells postulat på integralform bygger på Stokes sats. Amperes lag kan tillämpa Stokes sats för att beräkna ström genom ledare.

4 Potentialer

Om F är ett vektorfält är F konservativt $\iff \exists \Phi$ s.a. $\nabla \Phi = \mathbf{F}$. Om detta gäller kallas Φ för $\mathbf{F}$'s potential. Den fysikaliska tolkningen av detta är att potentialen utgör den potentiella energin en partikel i ett vektorfält har. På sättet att $\Phi(\vec{x}) =$ den potentiella energin av en partikel i position $\vec{x}$.

5 Nabla-räkning

Nabla operatoren betecknas ∇ och i $\mathbb{R}^3$ är $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ samma operator som vi känner igen från gradient, rotation och divergens. Fyra viktiga identiteter är

$\nabla \times \nabla \Phi = 0 \implies$ Potentialfält är virvelfria

$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 \implies$ Det finns vektorpotentialer och rotationsfält är källfria

$\nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla^2 \Phi = \Delta \Phi$ Definition av Laplacianen

$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$

Samtliga identiteter kan bevisas med indexnotation eller genom att utföra beräkningar för det godtyckliga fältet $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$

6 Optimering på kompakt område

En naturlig fråga när man har en funktion, är var den antar sitt största och minsta värde i ett visst område. Detta avsnitt kommer hantera den här frågan av reellvärda funktioner definierade på ett kompakt område.

Låt $f(\mathbf{x}) : D \rightarrow \mathbb{R}$ vara en C^1 funktion. Området $D \subseteq \mathbb{R}^n$ innehåller punkter som är antagligen inre-punkter eller randpunkter. Låt $D = D_0 \cup \partial D$. Där D_0 innehåller alla inre punkter och ∂D innehåller alla randpunkter.

Under föreläsningen presenterades en allmän metod för att bestämma dessa punkter.

1. Bestäm alla stationära punkter $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ till f . Lös $\nabla f = \mathbf{0}$.
2. Undersök randen genom att parametrisera styckvis. Sedan låt $g_i(t) = f(\mathbf{r}_i(t))$ och lös $g'_i(t) = 0$. Punkter som uppfyller de här läggs till i mängden av intressanta punkter.
3. Jämför alla punkter från steg 1 och steg 2 genom insättning, $f(\mathbf{a}_i)$. Den största respektive det minsta funktionsvärdet utgör funktionens största och minsta värde i området D .