

Sammanfattning läsvecka 7, MVE035

Lucas Kristensson, Hannes Käck Neutze,
Pontus Lindeberg Fredriksson

March 2022

1 Gauss sats

Definition: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en domän och $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ett C^1 -vektorfält. Divergensen av $\vec{F}$ är skalärfältet

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

För att lättare minnas uträkningsformeln kan man tolka skalärprodukten $\nabla \cdot \vec{F}$ bokstavligt och utföra den formella skalärprodukten

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

Gauss sats: Låt $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en öppen mängd och $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ett C^1 -vektorfält. Om $K \subset \Omega$ kompakt med rand ∂K bestående av C^1 -ytor orienterad med utåtriktad normal $\hat{N}$ gäller

$$\iint_{\partial K} \vec{F} \cdot \hat{N} dS = \iiint_K \nabla \cdot \vec{F} dV$$

Vänsterledet kallas för flödesintegralen av $\vec{F}$ genom ytan ∂K .

Beviset liknar det för Greens sats. Vi utgår från att området K är reguljärt, alltså att K kan delas upp i delområden K_i som var och en kan uttryckas som områden mellan två funktionsytor. Man börjar med att visa

$$\iint_{\partial K} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_3 \end{bmatrix} \cdot \hat{N} dS = \iiint_K \frac{\partial F_3}{\partial z} dV$$

vilket görs genom att visa att sambandet gäller för de enskilda delområdena K_i , alltså

$$\iint_{\partial K_i} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_3 \end{bmatrix} \cdot \hat{N} dS = \iiint_{K_i} \frac{\partial F_3}{\partial z} dV$$

som sedan kan summeras ihop för att ge ekvationen vi söker. Därefter visas

$$\iint_{\partial K} \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \hat{N} dS = \iiint_K \frac{\partial F_1}{\partial x} dV \quad \text{och} \quad \iint_{\partial K} \begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \hat{N} dS = \iiint_K \frac{\partial F_2}{\partial y} dV$$

på exakt samma sätt som den föregående ekvationen. Till slut kan de tre ekvationerna adderas ihop ledvis och sammanställas på vår slutgiltiga form

$$\iint_{\partial K} \vec{F} \cdot \hat{N} dS = \iiint_K \nabla \cdot \vec{F} dV$$

2 Stokes sats

Definition: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en domän och $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ett C^1 -vektorfält. Rotationen av $\vec{F}$ är vektorfältet

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{bmatrix}$$

På samma sätt som för divergensen kan man enkelt minnas uttrycket för $\nabla \times \vec{F}$ genom att utföra den formella kryssprodukten

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Stokes sats: Låt $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ vara en öppen mängd och $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ett C^1 -vektorfält. Om Y är ett orienterat ytstycke i Ω med positivt orienterad rand ∂Y gäller

$$\oint_{\partial Y} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_Y (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{N} dS$$

Att en orienterad yta har positivt orienterad rand innebär att $\hat{N} \times d\vec{r}$ pekar in mot ytan i varje punkt på randen. $\hat{N}$ är normalen till ytan (som även anger ytans orientering) och $d\vec{r}$ är riktningsvektor till randen, alltså om normalen färdas längs randen kommer ytan alltid att ligga till vänster.

Beviset bygger på att Y kan representeras av en C^2 -funktionsyta, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $z = f(x, y)$. Detta innebär att vi har $dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ gällande på randen vilket gör vänsterledet av satsen att bli

$$\oint_{\partial Y} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\partial D} \left(F_1 + F_3 \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx + \left(F_2 + F_3 \frac{\partial f}{\partial y} \right) dy$$

Efter användning av Greens sats och vissa förenklingar får man till slut

$$\iint_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot \begin{bmatrix} -f'_x \\ -f'_y \\ 1 \end{bmatrix} dx dy$$

I högerledet finner man att $\hat{N}dS = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right) dx dy = \begin{bmatrix} -f'_x \\ -f'_y \\ 1 \end{bmatrix} dx dy$ där

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow \iint_Y (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{N}dS = \iint_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot \begin{bmatrix} -f'_x \\ -f'_y \\ 1 \end{bmatrix} dx dy,$$

och därmed är satsen bevisad.

3 Nablaräkning

Nablaoperatorn är en vektoriell derivationsoperator som skrivs

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \quad (1)$$

Den uppför sig och kan räknas med som en tredimensionell vektor. Gradient, divergens och rotation av en skalär funktion f kan utföras med olika vektoroperationer med ∇ .

$$\nabla f = \text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) \quad (2)$$

Nablaoperatorn kan verka på ett vektorfält $\mathbf{u}$ på två sätt. Med skalärmultiplikation blir det

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \cdot (u_1, u_2, u_3) = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = \text{div } \mathbf{u} \quad (3)$$

Med vektorprodukt blir det

$$\nabla \times \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} = \text{rot } \mathbf{u} \quad (4)$$

Med dessa operationer definerade kan vi enkelt få fram samband mellan grad, div och rot. Tre exempel på detta är

$$\text{div}(\text{rot}(\mathbf{u})) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0 \quad (5)$$

$$\text{rot}(\text{grad}(\mathbf{u})) = \nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (6)$$

$$\text{rot}(\text{rot}(\mathbf{u})) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u} \quad (7)$$

Bevis av evation 5 då $\mathbf{u}=\mathbf{u}(x,y,z)$ och tillhör klass C^2 .

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) = 0 \quad (8)$$

Detta är på grund av Clairaut sats.

4 Potentialer

Ett potentialfält eller konservativt fält är ett fält $\mathbf{u}$ som i kan skrivas

$$\mathbf{u} = \text{grad } U = \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial x_3} \right) \quad (9)$$

där detta gäller i hela definitionsmängden för någon funktion U . Denna funktion kallas en potential till $\mathbf{u}$. Integralen

$$\int_{\gamma} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{b}) - U(\mathbf{a}) \quad (10)$$

beskriver potentialfältet längs en kurva γ där $\mathbf{a}$ är begynnelsepunkt och $\mathbf{b}$ slutpunkt. Integralen är alltså oberoende av vägen. En differentialform av $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)$ kan även uttryckas som

$$u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3 \quad (11)$$

Detta kan skrivas som differentialen av en funktion U

$$dU = u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3 \quad (12)$$

Vilket är ekvivalet med

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = u_1, \frac{\partial U}{\partial x_2} = u_2, \frac{\partial U}{\partial x_3} = u_3 \quad (13)$$

Ty

$$(\text{grad}) U = \mathbf{u} \quad (14)$$

Virvelfria fält och potentialfält i $\mathbf{R}^3$

Sats 10.5.3 Varje potentialfält är virvelfritt

Bevis

Antag $\vec{F}$ tillhör klass $c1$ och $\vec{F} = \nabla \phi$ med $\phi: D \rightarrow \mathbf{R}$ en $c2$ funktion, dvs $\vec{F}$ konservativt.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Sista steget i ekvation (16) är på grund av Clairaut sats.

5 Optimering på kompakta områden

Optimering innebär att hitta det högsta eller lägsta värdet på en C^1 -funktion i ett givet område i $\mathbf{R}^n$. I kompakta områden gäller det speciellt att det alltid finns ett högsta och lägsta värde. En till observation som kan göras är att punkten där det lägsta värdet antas alltid är en randpunkt eller en inre punkt, något som blir viktigt när man senare ska hitta värdena. Om punkten som antar det lägsta eller högsta värdet inte är en randpunkt är det alltid en stationär punkt.

För att hitta stationära punkter finns en generell metod. Metodens första steg är att beräkna gradienten av funktionen och använda det för att hitta stationära punkter, alltså punkter där $\nabla \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Alla stationära punkter i området är kandidater för punkten med det högsta eller lägsta värdet.

Metodens andra steg är att dela upp randen i C^1 segment och parametrisera dem. Randsegmentens gradients kan sedan beräknas och användas för att beräkna randens extrempunkter, vilka också är kandidater för punkter med det lägsta funktionsvärdet. Notera att randen på en $\mathbf{R}^n$ tillhör $\mathbf{R}^{n-1}$.

En viktig notering är att extrempunkterna för randsegmenten kan ligga på randsegmentens rand, så processen måste upprepas tills antalet dimensioner har minskats till 0.

Då man har alla kandidater för punkter med högsta eller minsta värde måste funktionsvärdet i alla dessa punkter beräknas för att hitta den punkt som ger lägst eller högst värde, beroende på vad man letar efter.

Värt att notera är att det ofta går att använda sig av trick för att förenkla beräkningen, men sådana varierar från fall till fall, så är svårt att ge en allmän beskrivning av dem.