

Tavelpresentation - Grupp 6D

Cevin Åström, Hugo Olsson, Jakob Lindberg, Karl Junior Andersson
Gustav Karlsson, Vilhelm Nilsson Thorsson

Februari 2022

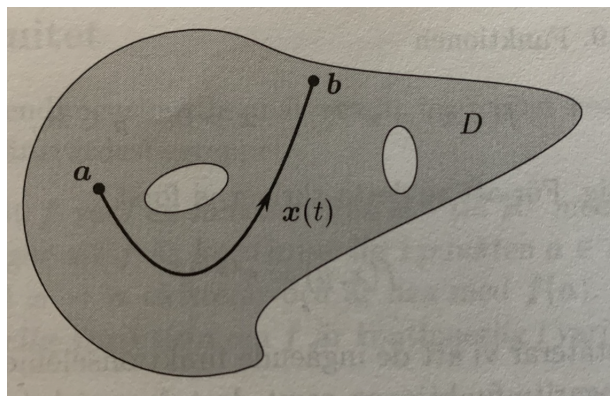
1 Kurvintegraler

Definition (kurvintegral): Låt $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (P(\mathbf{r}), Q(\mathbf{r})) = (P(x, y), Q(x, y))$ vara ett C^0 -vektorfält definierad i en bågvisst sammanhängande öppen mängd $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Ifall γ är en C^1 -kurva i D med parametriseringen $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ och $a \leq t \leq b$ kallas

$$I = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_a^b (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) dt \quad (1)$$

för kurvintegralen av $\mathbf{F}$ längst γ .

I är oberoende av parametriseringen, värt att notera är också att I byter tecken vid orienteringsbyte. I definitionen används begreppet bågvisst sammanhängande öppen mängd. En sådan mängd $D \subseteq \mathbb{R}^n$ kallas domän. D är bågvisst sammanhängande ifall det existerar en kontinuerlig kurva, $t \mapsto \mathbf{x}(t)$, i D till varje par av punkter a, b och $\alpha \leq t \leq \beta$ sådan att $\mathbf{x}(t) \in D \forall t$ och $\mathbf{x}(\alpha) = a$, $\mathbf{x}(\beta) = b$.



Figur 1: En godtycklig kontinuerlig kurva i en bågvisst sammanhängande öppen mängd D som går från punkten a till b .

Sats (Jordans kurvsats): Låt γ vara en enkel och sluten C^0 -kurva i $\mathbb{R}^2$. Då består $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ av exakt två sammanhängande komponenter. Den begränsade kallas insidan, och den obegränsade kallas utsidan.

Definition (orientering): Låt γ vara en enkel och sluten kurva i $\mathbb{R}^2$. γ är positivt orienterad om insidan ligger till vänster om färdriktningen, och negativt orienterad om insidan ligger till höger.

1.1 Notation

1. Eftersom integralens värde inte beror på valet av parameter enligt sats ovan skrivs ofta integralen:

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (2)$$

2. I planet kan vi utveckla skalärprodukten $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Låt $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (P(x, y), Q(x, y))$ och $d\mathbf{r} = (dx, dy)$. Då ges:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma} P dx + Q dy. \quad (3)$$

På samma sätt ges i rummet, med $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ och $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz. \quad (4)$$

3. Vi kan definiera kurvintegralen över en styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva γ enligt följande. Låt $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ vara $\mathcal{C}^1$ -kurvor så att $\text{slut}(\gamma_i) = \text{start}(\gamma_{i+1}) \forall i = 1, \dots, k-1$ och $\gamma = \sum_{i=1}^k \gamma_i$. Då ges:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (5)$$

4. Om γ är en kurva är $-\gamma$ kurvan med motsatt orientering. För godtyckligt vektorfält $\mathbf{F}$ ges:

$$\int_{-\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (6)$$

5. Vi tydliggör att γ är en sluten kurva med notationen:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (7)$$

Detta innebär att vi räknar med positiv orientering. För att specificera orienteringen används också

$$\oint_{\gamma}^+ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (8)$$

för positiv orientering samt

$$\oint_{\gamma}^- \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (9)$$

för negativ orientering.

Vid beräkning av kurvintegraler finns ett par olika tillvägagångssätt. Det är ofta möjligt att parametrisera kurvan och på så sätt få en envariabelintegral som går att lösa. En annan metod är att utnyttja potentialer för konservativa fält. Nämnade tillvägagångssätt fungerar i godtyckliga dimensioner. Ett sista exempel på metod är att använda Greens sats, den fungerar dock endast i $\mathbb{R}^2$. Dessa metoder går att läsa mer om längre ner i dokumentet.

2 Kurvintegraler över konservativa fält

Sats 9.4.2: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en domän och $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara ett konservativt fält där potentialen $\Phi : \mathbf{F} = \nabla \Phi$ existerar. Kurvintegralen längs C^1 -kurvan γ , med start- respektive slutpunkt i $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ har följande egenskapen:

$$I = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(\mathbf{b}) - \Phi(\mathbf{a}) \quad (10)$$

Satsen säger alltså att värdet av kurvintegralen är skillnaden i potential mellan slut- och startpunkt $\mathbf{b}$ och $\mathbf{a}$, givet ett konservativt kraftfält med tillhörande potential Φ .

Bevis av sats 9.4.2: För att visa likhet i ekvation (10) nyttjas antagandena i sats 9.4.2. Först tas parametriseringen av $\mathbf{r}(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ av γ . Alltså,

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}' dt. \quad (11)$$

Härnäst används antagandet att $\mathbf{F} = \nabla \Phi$, vilket innebär att

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}' dt = \int_a^b \nabla \Phi(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}' dt. \quad (12)$$

Integranden i högerled av ekvation (12) är tillämpningen av kedjeregeln, vilket säger att $\frac{d}{dt} f(\mathbf{g}(t)) = \nabla f(\mathbf{g}(t)) \cdot \mathbf{g}'(t)$. Detta leder till att

$$\int_a^b \nabla \Phi(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}' dt = \int_a^b \frac{d}{dt} \Phi(\mathbf{r}(t)) dt. \quad (13)$$

Slutligen används analysens huvudsats för att omformulera föregående ekvation enligt

$$\int_a^b \frac{d}{dt} \Phi(\mathbf{r}(t)) dt = \Phi(\mathbf{r}(b)) - \Phi(\mathbf{r}(a)) = \Phi(\mathbf{b}) - \Phi(\mathbf{a}), \quad (14)$$

$$\therefore \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(\mathbf{b}) - \Phi(\mathbf{a}), \quad (15)$$

vilket avslutar beviset. $\square$

Genom ett par enkla observationer av sats 9.4.2 kan följande följsatser upprättas.

Följsatser till sats 9.4.2:

- Värdet av kurvintegralen är endast beroende av start- och slutpunkterna.
- Kurvintegralen längs en godtycklig sluten kurva γ över ett konservativt fält ger

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (16)$$

Sats 9.4.3: Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en domän, och låt vidare $\mathbf{F}$ vara ett kontinuerligt vektorfält i D . Om kurvintegralen

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (17)$$

är oberoende av vägen, eller ekvivalent att kurvintegralen

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (18)$$

för varje sluten $\mathcal{C}^1$ -kurva γ i D . Då är $\mathbf{F}$ konservativt, vilket medför att $\mathbf{F}$ har en potential Φ i D .

Bevis av sats 9.4.3: Vi vill konstruera en potential $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ till fältet $\mathbf{F}$ sådana att $\mathbf{F} = \nabla \Phi$. Området D har per definition egenskapen att två punkter kan förbindas med en kontinuerlig kurva som går genom hela D . Vi väljer således $\mathbf{a} \in D$ godtyckligt och definierar

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (19)$$

där γ är en godtycklig styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva från $\mathbf{a}$ till $\mathbf{x}$. Vi vill nu bevisa att för $\mathbf{F} = \nabla \Phi \Leftrightarrow \forall \mathbf{b} \in D$ och $i = 1, \dots, n$ gäller

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = F_i(\mathbf{b}). \quad (20)$$

Fixera i och $\mathbf{b}$ sådana att

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\mathbf{b}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(\mathbf{b} + h\mathbf{e}_i) - \Phi(\mathbf{b})}{h}. \quad (21)$$

Vi får här tre sträckor där γ_1 är en godtycklig styckvis $\mathcal{C}^1$ -kurva från $\mathbf{a}$ till $\mathbf{b}$, $\gamma_{3,h}$ är raksträckan från $\mathbf{b}$ till $\mathbf{b} + h\mathbf{e}_i$, och γ_2 är $\gamma_1 + \gamma_{3,h}$ där

$$\Phi(\mathbf{b}) = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (22)$$

och

$$\Phi(\mathbf{b} + h\mathbf{e}_i) = \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (23)$$

vilket implicerar att

$$\Phi(\mathbf{b} + h\mathbf{e}_i) - \Phi(\mathbf{b}) = \int_{\gamma_{3,h}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (24)$$

Vi väljer nu att parametrisera $\gamma_{3,h}$ på följande vis:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{b} + \begin{bmatrix} 0 \\ ht \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (25)$$

vilket implicerar att vår tidigare kurvintegral över $\gamma_{3,h}$ kan skrivas

$$\int_{\gamma_{3,h}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ n \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} dt = h \int_0^1 F_i(\mathbf{b} + h\mathbf{e}_i) dt. \quad (26)$$

Till sist appliceras medelvärdessatsen från envariabelanalysen vilket omformulerar våra tidigare uttryck enligt

$$\frac{\Phi(\mathbf{b} + h\mathbf{e}_i) - \Phi(\mathbf{b})}{h} = \int_0^1 F_i(\mathbf{b} + h\theta\mathbf{e}_i) d\theta = F_i(\mathbf{b} + h\theta\mathbf{e}_i), \quad 0 \leq \theta \leq 1. \quad (27)$$

Således har vi att

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(\mathbf{b} + h\mathbf{e}_i) - \Phi(\mathbf{b})}{h} = F_i(\mathbf{b}) \quad (28)$$

vilket avslutar beviset. $\square$

Defintion: Låt $\mathcal{C}^1$ -vektorfältet $\mathbf{F}$ i $\mathbb{R}^2$ vara matrisen

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}. \quad (29)$$

$\mathbf{F}$ kallas då virvelfritt om det gäller att

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (30)$$

Sats 9.4.4: Om $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är en domän och $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ ett $\mathcal{C}^1$ -vektorfält. Då gäller det att om $\mathbf{F}$ konservativt $\implies \mathbf{F}$ virvelfritt.

Bevis av sats 9.4.4: Vi börjar med att anta att $\mathbf{F}$ är ett konservativt $\mathcal{C}^1$ -vektorfält. Detta implicerar att $\exists \Phi \in \mathcal{C}^2$ sådana att $\mathbf{F} = \nabla \Phi$. Matriselementen P och Q i $\mathbf{F}$ är således

$$P = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (31)$$

Vi kan då skriva följande

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (32)$$

vilket avslutar beviset. $\square$

3 Greens Formel

*OBS: Detta är en tolkning av beviset från boken *Analys i flera variabler* av Arne Persson och Lars-Christer Böiers. Bevisidéén är därför tagen där ifrån och är inget originellt arbete.*

För ett okomplicerat område D i planet kan vi uppfatta dess rand ∂D som en kurva. Konventionen är att området ligger till vänster om kurvan. Då sägs kurvan vara positivt orienterad. Detta innebär att en inre rand till en mängd enligt bilden nedan har till synes åt motsatt orientering eftersom att området D fortfarande ska ligga till vänster. Ibland förekommer symbolen

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy$$

för integration längs kurvan till området D om ∂D är sluten.

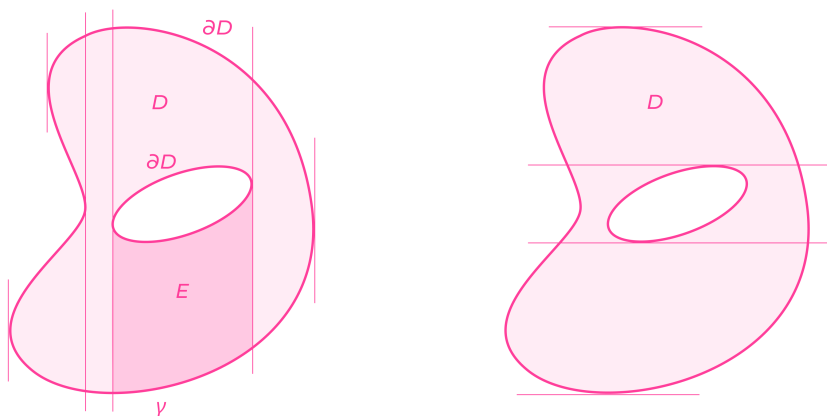
Sats: Låt P och Q vara C^1 -funktioner definierade i en öppen mängd Ω i planet. Om ett kompakt delområde $D \in \Omega$ omsluts av en rand ∂D vilken består av en eller fler styckvis C^1 -kurvor med positiv orientering gäller

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (33)$$

Bevis: Området D delas upp i ändligt många områden av typen

$$E = \{(x, y); \varphi(x) \leq y \leq \psi(x), a \leq x \leq b\}$$

tillsammans med en motsvarighet bestående av linjer parallella med x -axeln.



Figur 2: Områdena D och E där ∂D är rand till D . Kurvan γ utgör den nedre begränsningen till området E .

I figuren finns ett skuggat område E . Först visar vi att

$$\int_{\partial E} P dx = \iint_E -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

gäller för detta område och tillhörande rand,

$$\begin{aligned} \iint_E -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_{x=a}^b \left(\int_{y=\varphi(x)}^{\psi(x)} -\frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \\ &= \int_{x=a}^b [-P(x,y)]_{y=\varphi(x)}^{\psi(x)} dx = \int_a^b P(x,\varphi(x)) dx - \int_a^b P(x,\psi(x)) dx. \end{aligned} \quad (34)$$

Genom att låta x användas som en parameter kan kurvan γ framställas:

$$\mathbf{r} = (x, \varphi(x)), a \leq x \leq b.$$

Den första integralen in högerledet i 34 är därför lika med kurvintegralen

$$\int_{\gamma} P dx + 0 dy = \int_{\gamma} P dx.$$

Genom att använda samma sätt får vi att den andra termen är

$$- \int_{\gamma} P(x, \psi(x)) dx = \int_{\sigma} P dx$$

där σ är randen vid den övre begränsningen i området E . Kurvintegralen av $P dx$ längs de eventuella vertikala randstyckena till E är noll. Detta innebär att vi har

$$\iint_E -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{\partial E} P dx.$$

Genom addition av detta resultat för alla genererade delområden E från D får vi att

$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_{\partial D} P dx, \quad (35)$$

eftersom kurvintegralerna längs de inre vertikala linjestyckena går åt båda håll ger de inget nettobidrag. Genom att istället använda en uppdelning av D med linjer parallella med x -axeln ges med liknande förfarande

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{\partial D} Q dy. \quad (36)$$

Nu kan vi addera 35 och 36 vilket ger

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} P dx + Q dy. \quad (37)$$

Beviset är därmed klart. $\square$

3.1 Tillämpningar av Greens sats

Definition: $M \subseteq \mathbb{R}^2$ är en enkelt sammanhängande mängd om den är både bågvisst sammanhängande och insidan av varje sluten kurva i M ligger helt i M .

Det sistnämnda kan rent topologiskt tolkas som att varje sluten kurva i M kan kontinuerligt omformas till en punkt. I $\mathbb{R}^2$ kan detta tolkas som att det inte finns hål i mängden.

Sats: Om domänen $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är enkelt sammanhållande och $\mathbf{F} : D \mapsto \mathbb{R}^2$ är ett $\mathcal{C}^1$ vektorfält samt virvelfritt. Då är också $\mathbf{F}$ är konservativt.

Bevis: Låt γ vara en godtyckligt enkelt slutna kurva i D . Låt E vara insidan av γ förutsatt att kurvan är positivt orienterad. Låt $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$. Då gäller att $E \subseteq D \implies \mathbf{F}$ är ett $\mathcal{C}^1$ vektorfält i E samt definierad i hela E . Randen $\partial E = \gamma$. Användning av Greens sats ger följande:

$$\oint_{\partial E} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial E} P dx + Q dy = \iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (38)$$

Observera här att $\mathbf{F}$ är virvelfritt vilket betyder att $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Vi har alltså att:

$$\iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_E (0) dx dy = 0. \quad (39)$$

Detta betyder alltså att kurvintegralen för varje godtycklig enkel slutna kurva i D är noll vilket betyder att $\mathbf{F}$ är konservativt. $\square$