SVAR ELLER LÖSNINGAR TILL

TENTAMEN I FLERVARIABELANALYS FÖR I2 MVE270

Lördag 12 mars 2022 kl 8.30 – 12.30

1. Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $x^2z + y\sin(\pi z) + y^2x = 3$ i punkten $(x, y, z) = (1, -1, 2)$ **(3p)**

   Lösning: e $w = x^2z + y\sin\pi z + y^2x$ så att den givna ytan blir nivåytan w=3.
   $\nabla w = (2xz + y^2, \sin\pi z + 2xy, x^2 + \pi y\cos z\,\pi) = (5, -2, 1 - \pi)$ i (1,-1,2)

   Svar: $5(x-1) - 2(y+1) + (1-\pi)(z-2) = 0$

2. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \frac{dxdy}{1+y^4}$ där *D* är området som beskrivs av olikheterna $\begin{cases} \sqrt[3]{x} < y < 2 \\ 0 < x < 8 \end{cases}$ **(4p)**

   Lösning: vi beskriver området som $\begin{cases} 0 < x < y^3 \\ 0 < y < 2 \end{cases}$

   $\int_0^{y^3} \frac{dx}{1+y^4} = \frac{y^3}{1+y^4}$ och svaret blir $\int_0^2 \frac{y^3}{1+y^4}dy = \frac{\ln 17}{3}$

3. Lös den partiella differentialekvationen $2\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ genom att införa nya variabler $\begin{cases} u &= x - ky \\ v &= x + ky \end{cases}$ och välja *k* på lämpligt sätt. **(3p)**

   Lösning: Vi använder kedjeregeln för att få ekvationen
   $(2-k)f'_u + (2+k)f'_v = 0$ Genom att välja k = 2 blir $f'_v = 0$ så att f=h(u)

   Svar: $f = h(x - 2y)$ där h är en deriverbar funktion av en variabel.
   (det går förstås lika bra att välja k = -2)

4. Beräkna kurvintegralen $\int_C \frac{1}{y}dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{y}{z^2}dz$ där C är en

kurva med parametriseringen: $\begin{cases} x &= 2t \\ y &= 1+\sin(\pi t) \\ z &= 2-\cos(\pi t) \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{1}{2}$ **(5p)**

Lösning: fältet är konservativt med potential $U = \frac{x}{y} + \frac{y}{z}$

Eftersom kurvan börjar i (0,1,1) och slutar i (1,2,2) blir kurvintegralen =
$U(1,2,2) - U(0,1,1) = 1/2$

5. Dante befinner sig i punkten (2,1) i (x,y)-planet där temperaturen i en punkt (x,y) är $T(x,y) = x^2y^3$. Dante kan bara röra sig längs linjen $3x + 4y = 10$.

I vilken riktning på den linjen skall Dante röra sig för att temperaturen skall öka? Ange riktningsderivatan i denna riktning. **(3p)**

Lösning: vi beräknar riktningsderivatan i riktningarna $v = \frac{(4,-3)}{5}$ och $u = \frac{(-4,3)}{5}$:

$\nabla T = (2xy^3, 3x^2y^2) = (4,12)$ så $f'_v = \frac{16-36}{5} < 0.$

Svar: åt ”vänster” med riktningsderivata = 4

6. Bestäm, om sådana existerar, största och minsta värde av funktionen $f(x,y) = x + y$ på den del av kurvan $x^2 + xy + y^2 = 3$ där $x \ge 0$ **(5p)**

Lösning: kurvan utgör ett kompakt område så största och minsta värde finns i en punkt där gradienterna är parallella eller där x=0.
sätt $h = x^2 + xy + y^2$ så att $\nabla h = (2x + y, x + 2y)$

Vi vill alltså lösa systemet $\begin{cases} \begin{vmatrix} 2x+y & x+2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ h = 3 \end{cases}$ som leder till $(x,y) = (1,1)$
(eftersom x>0).

Svar: största värde: $f(1,1) = 2$ och minsta värde: $f\left(0, -\sqrt{3}\right) = -\sqrt{3}$

7. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D e^{2x+y}\cos(3y-x)\,dxdy$

Området *D* är ett parallellogram med hörn i punkterna (-1,2), (0,0), (2,3) samt (3,1). **(6p)**

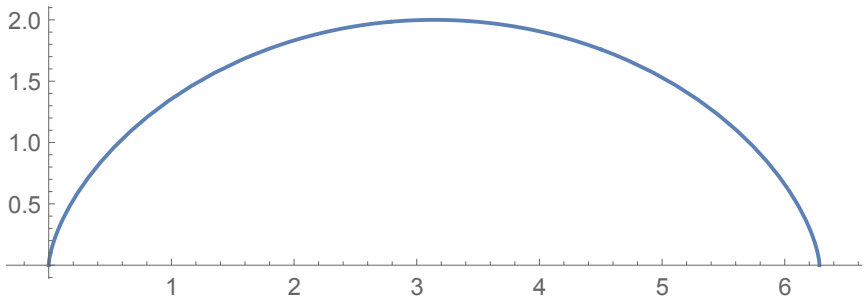
Lösning: nya variabler: $\begin{cases} s = 2x+y \\ t = -x+3y \end{cases}$. Gränser för s och t: $\begin{cases} 0 \le s \le 7 \\ 0 \le t \le 7 \end{cases}$

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \frac{1}{7}$ så att dubbelintegralen = $\frac{1}{7}\int_0^7 e^s ds \int_0^7 \cos t\, dt = \frac{\sin 7(e^7-1)}{7}$

8. Skissera kurvan $(x,y) = (t-\sin t\,, 1-\cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$.
Beräkna arean av området mellan kurvan och *x*-axeln. **(6p)**

Lösning:

Out[ ]=



Arean ges av kurvintegralen $\int_C -ydx = \int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 = 3\pi$ där C är den givna kurvan och vi har korrigerat för orientering. Kurvintegralen över x-axeln blir = 0 eftersom y = 0.
Svar: 3π

9. Beräkna flödet av fältet $F = (xz+y^3, \sin(x^2)+z^3, 1+z^2)$ ner genom halvsfären $x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \ge 0$ **(7p)**

Lösning: eftersom $divF = z+0+2z$ använder vi divergenssatsen efter att ha lagt till ytan B, $x^2+y^2 \le 1, z = 0$.
Vi kallar halvsfären Y.

Då blir $\iint_{Y+B} F\cdot NdS = \iiint_E 3zdV$ där E är området innanför Y+B.

Rymdpolära koordinater: $\iiint_E \; 3zdV = \iiint_{\substack{0<r<1 \\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ 0<\varphi<2\pi}} 3r^2 \sin\theta \, r \cos\theta \; dr d\theta d\varphi = \frac{3\pi}{4}$

På ytan B är $N = (0,0,-1)$ så $\iint_B \; F \cdot N dS = \iint_B \; -1 - z^2 dS = -\pi$

Alltså är $\iint_Y \; F \cdot N dS = \frac{7\pi}{4}$ där vi räknat flödet upp genom halvsfären.

Svar: flödet är $-\frac{7\pi}{4}$

10. Låt $f(x,y) = (y + x^2 - 1)e^{x-y}$ och D området $y \geq |x|$

a. Bestäm alla stationära punkter till $f(x,y)$ i D.
(det är inte nödvändigt att bestämma karaktären) **(2p)**

Lösning: vi hittar stationära punkter genom att lösa systemet:

$$\begin{cases} 2x + y + x^2 - 1 & = & 0 \\ 1 - (y + x^2 - 1) & = & 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad (x,y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right) \text{ (innanför D)}$$

b. Avgör om $f(x,y)$ har något största respektive minsta värde i D.
Bestäm dem i så fall. **(6p)**

Lösning: Vi noterar först att $f(x,x) = x + x^2 - 1$ så största värde existerar uppenbarligen inte.

Bilda sedan området T: $|x| \leq y \leq 1 - x^2$ T är en kompakt delmängd av D; på T är $f \leq 0$ men i resten av D är $f \geq 0$.
Alltså finns ett minsta värde i T som också är minsta värde på hela D.
En snabb analys visar att de enda intressanta punkterna i T är den stationära punkten ovan samt origo.

Svar: minsta värde är $f(0,0) = -1$, största värde saknas.