LMA201: Föreläsning 22/2 - 2021

Markovkedjor i diskret tid.

En <u>Markovkedja</u> är en typ av <u>stokastisk process.</u>

<u>Def</u>: En stokastisk process i diskret tid är ett gäng stokastiska variabler $X = (X(0), X(1), X(2), \ldots)$ #

$X(0)$ = processens värde vid tiden 0.

$X(1)$ = — " — 1.

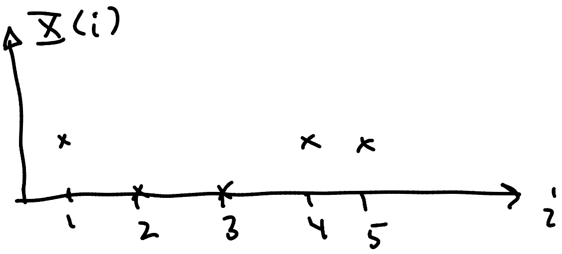
⋮

$X(i)$ = — " — i.

<u>Exempel 1</u>: En akties värdeutveckling kan betraktas som en stokastisk process X. $X(i)$ = aktiens värde vid tidpunkt i.

<u>Ex 2</u>: Låt $X(i) = \begin{cases} 1 & \text{om det regnar dag } i \\ 0 & \text{— " — inte — " —} \end{cases}$

En <u>realization</u> av processen kan se ut så här:



<u>OBS</u>: I ex 1 kan processen anta oändligt många värden men i ex 2 bara 2 olika.

För en stokastisk process $X = (X(0), X(1), \ldots)$ gäller i allmänhet att de stokastiska variablerna inte är oberoende av varandra. M.a.o., processens värde vid tiden n, dvs $X(n)$, kan bero på $X(n-1), X(n-2), \ldots$

För Markovkedjor ser detta beroende ut på ett mycket speciellt sätt.

Def: Tillståndsrummet för en stokastisk process är mängden av alla värden som processen kan anta. Ofta kallar vi processens tillståndsrum

$$\Omega = \{E_0, E_1, E_2, \ldots\} \quad \#$$

"Omega"

I ex 2: $\Omega = \{0, 1\}$.

Def: (Markovkedja i diskret tid)

Låt Ω vara ett tillståndsrum. En stokastisk process $X = (X(0), X(1), \ldots)$ kallas en Markovkedja om för varje val av $n \geq 1$ och tidpunkter $t_{n+1} > t_n > t_{n-1} > \ldots > t_1 > t_0$ och värden $x_{n+1}, x_n, \ldots, x_0 \in \Omega$ det gäller att

$$P(X(t_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(t_n) = x_n, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \ldots, X(t_0) = x_0)$$

$$= P(X(t_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(t_n) = x_n). \quad \#$$

(Bara vad som hände vid sista tidpunkten spelar roll vid betingningen.)

Kom ihåg: $\underbrace{P(A \mid B)} := \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

↑ sannolikheten för A om vi vet att B inträffat

Ex: Antag vi singlar slant. Låt $X(0)=0$. För $n\geq 1$ så låt $X(n)=$ antalet ggr. vi fick krona vid de n första kasten. Är denna process en Markovkedja?

"Betingade sannolikheten för A givet B"

Låt $\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{om kast nr } i \text{ blir krona} \\ 0 & \text{— " — } i \text{ klave.} \end{cases}$

oberoende för olika i

Då kan vi skriva $X(n) = \underbrace{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots + \xi_{n-1}}_{= X(n-1)} + \xi_n$

Vi ser att $X(n) = X(n-1) + \xi_n$.

Alltså beror $X(n)$ på dåtiden endast genom $X(n-1)$!
Detta betyder att X är en Markovkedja!
Exempelvis fås att $P(X(10)=8 \mid X(9)=8, X(8)=7, X(7)=7)$

$$= P(X(10)=8 \mid X(9)=8)$$

$$= P(\text{klave vid 10:e kastet}) = \frac{1}{2}.$$

$\boxed{\text{Rast t. } 14^{15}}$

I föregående exempel så är $\Omega = \{0,1,2,\ldots\}$.

Ofta kallas de "värden" som en Markovkedja kan anta för tillstånd och betecknas $E_0, E_1, \ldots$
$(E_1, E_2, \ldots)$

Def: Sannolikheten att en Markovkedja befinner sig i tillstånd E_i vid tidpunkt n skrivs

$$p_i^{(n)} := P(X(n) = E_i).$$

Def: Sannolikheten att en Markovkedja befinner sig i tillstånd E_j vid tiden n, givet att den befinner sig i tillstånd E_i vid tiden $n-1$ skrivs

$$p_{ij} := P(X(n) = E_j \mid X(n-1) = E_i).$$

"övergångssannolikheten från tillstånd E_i till E_j."

OBS: p_{ij} kan bero på n men inte i denna kurs.
Om p_{ij} ej beror på n så kallas Markovkedjan för tidshomogen.

EX: (1.5) En maskin har två tillstånd:

E_0 = maskin hel

E_1 = maskin trasig

Maskinen kontrolleras med jämna mellanrum.
Låt $X(n)$ = maskinens tillstånd vid kontrolltillfälle nr. n.
Antag att $X(n)$ är en Markovkedja (realistiskt?)
Vad står p_{00}, p_{01}, p_{10} och p_{11} för?

$p_{00} = P(X(n) = E_0 \mid X(n-1) = E_0)$ = "sannolikheten att maskinen hel vid kontrolltillfälle, givet att den var hel vid förra kontrolltillfället."

p.s.s. p_{01} = "sannolikheten att maskinen är trasig vid kontrolltillfälle, givet den var hel förra tillfället"

Def: Övergångssannolikheterna brukar skrivas in i en övergångsmatris P. Om vi har en Markovkedja med n tillstånd $E_1, \dots, E_n$ så har vi övergångs-sannolikheter p_{ij} , $i,j=1,\dots,n$.

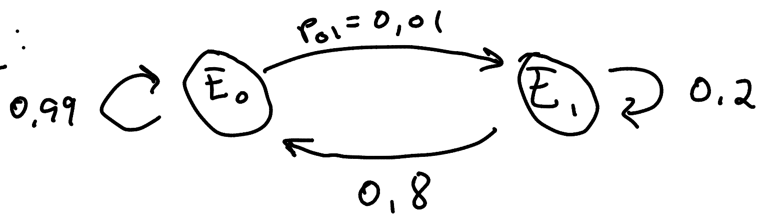
Matrisen P skapas genom att sätta p_{ij} i rad i, kolumn nr j.

I exemplet ovan är $P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix} \underset{\text{boken}}{\overset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} 0{,}99 & 0{,}01 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$

<u>OBS</u>: Om en MK har k tillstånd så är P en $k \times k$ matris.

En Markovkedjas övergångsmekanism kan även beskrivas med en <u>övergångsgraf</u>.

<u>I ex ovan</u>:



<u>OBS</u>: Radsummor i P är alltid 1.

<u>OBS</u>: "Summan av utgående sannolikheter i övergångsgrafen är alltid 1".

#