LMA201: Föreläsning 2021-02-25

Markovkedjor i diskret tid, forts

Kom ihåg: Antag X är en Markovkedja i diskret tid med tillståndsrum $\Omega = \{E_1, \ldots, E_k\}$.

Viktiga begrepp: $\boxed{p_{ij}} = P(X(n+1) = E_j \mid X(n) = E_i)$ oberoende av n i kursen

$\boxed{\text{Övergångsmatrisen } P}$ har p_{ij} i rad i, kolumn j.

$\boxed{p_{ij}^{(r)}} = P(X(n+r) = E_j \mid X(n) = E_i)$.

$\boxed{\text{r-stegs övergångsmatrisen}}$ $P^{(r)}$ har $p_{ij}^{(r)}$ i rad i, kolumn j.

$\boxed{\text{Sats:}}$ $P^{(r)} = \underbrace{P \cdot P \cdots P}_{r \text{ stycken}} \quad (= P^r)$

Def: Antag X är en MK med tillståndsrum $\Omega = \{E_1, \ldots, E_k\}$.
Tillståndsvektorn $p^{(n)}$ definieras som

$$p^{(n)} := \big(P(X(n)=E_1), P(X(n)=E_2), \ldots, P(X(n)=E_k)\big)$$

1xk matris (vektor av längd k) #

OBS: $p^{(n)}$ ger sannolikhetsfördelningen för $X(n)$.
$p^{(0)}$ kallas startvektorn.

☆ **Sats:** $p^{(n)} = p^{(0)} \cdot P^{(n)}$.

Alternativt: $p^{(n)} = p^{(n-1)} \cdot P$

Exempel: Antag X en MK med tillstånd E_1 & E_2 och $P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$ (symmetrisk $P_{ij} = P_{ji}$)

och startvektor $p^{(0)} = (0,2 \quad 0,8)$.

Övergångsgraf:

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[loop left, "0{,}1"] \arrow[rr, bend left, "0{,}9"] & & E_2 \arrow[loop right, "0{,}1"] \arrow[ll, bend left, "0{,}9"] \end{tikzcd}$$

Beräkna $p^{(1)}$ och $p^{(2)}$: $p^{(1)} \overset{\text{sats ☆}}{=} p^{(0)} \cdot P =$

$$= (0,2 \quad 0,8) \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix} = (\underbrace{0,2 \cdot 0,1}_{\substack{\text{starta i } E_1, \\ \text{stanna i } E_1}} + \underbrace{0,8 \cdot 0,9}_{\substack{\text{starta i } E_2, \\ \text{hoppa t } E_1}} \quad 0,2 \cdot 0,9 + 0,8 \cdot 0,1)$$

$$= (0,74 \quad 0,26).$$

$$p^{(2)} = p^{(1)} \cdot P = (0,74 \quad 0,26) \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$$

$$= (0,74 \cdot 0,1 + 0,26 \cdot 0,9 \qquad 0,74 \cdot 0,9 + 0,26 \cdot 0,1)$$

$$= (0,308 \qquad 0,692).$$

P.s.s. beräknas $p^{(3)} = (0,6536 \,, \quad 0,3464)$

Exempel på stationär fördelning

Visar sig att $p^{(n)} \to (0,5 \quad 0,5)$ då $n \to \infty$.

Def: $\boxed{\text{Stationär fördelning}}$

Antag $\underline{X}$ är en MK med tillståndsrum $E_1, \ldots, E_k$ och övergångsmatris P.

Antag att $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k)$ är en <u>sannolikhetsvektor</u> $\left(\begin{array}{l} 0 \leq \pi_i \leq 1, \quad i = 1, \ldots, k \\ \sum_{i=1}^{k} \pi_i = 1 \end{array} \right)$

Om $p^{(0)} = \pi$ medför att $p^{(n)} = \pi$ för alla $n \geq 1$ så sägs π är en stationär fördelning för Markovkedjan. #

EX: $P = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ och $p^{(0)} = (0{,}5 \quad 0{,}5)$.

Då fås $p^{(1)} = p^{(0)} P = (0{,}5 \quad 0{,}5) \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

$= (0{,}5 \cdot 0{,}1 + 0{,}5 \cdot 0{,}9 \qquad 0{,}5 \cdot 0{,}9 + 0{,}5 \cdot 0{,}1) = (0{,}5 \quad 0{,}5)$

p.s.s. fås $p^{(2)} = p^{(3)} = \ldots = (0{,}5 \quad 0{,}5)$.

Så $\pi = (0{,}5 \quad 0{,}5)$ är en stationär fördelning för denna MK. #

Sats: Om sannolikhetsvektorn π uppfyller

$$\boxed{\pi = \pi \cdot P}$$

Så är π en stationär fördelning för MK med övergångsmatris P.

Bevis: Antag att $p^{(0)} = \pi$ och att $\pi = \pi P$.

Då skall vi visa att $p^{(n)} = \pi$ för alla $n \geq 1$.

Antag $p^{(n)} = \pi$. Då blir $p^{(n+1)} \underset{\text{Sats ✲}}{=} p^{(n)} \cdot P$

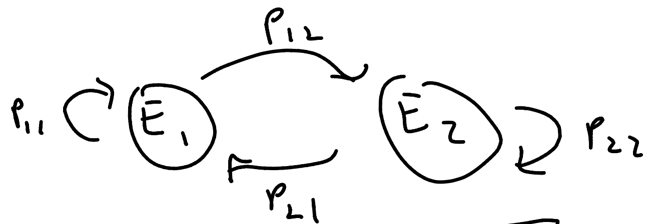
$= \pi P = \pi$. Så induktionsprincipen $\Longrightarrow$

$p^{(n)} = \pi$ för alla n.

Så π är stationär fördelning! #

$\boxed{\text{Rast t. } 14^{\underline{15}}}$

Exempel: Betrakta en MK med 2 tillstånd E_1 & E_2. $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$



Ta fram stationär fördelning!

✲

L: Lös $\boxed{\pi = \pi P}$ då π är en $\boxed{\text{sannolikhetsvektor}}$

$$\pi P = (\pi_1 \quad \pi_2) \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = (\pi_1 p_{11} + \pi_2 p_{21} \quad \pi_1 p_{12} + \pi_2 p_{22})$$

Så $\pi = \pi P$ är ekvivalent med

$$\pi_1 = \pi_1 p_{11} + \pi_2 p_{21} \quad (1)$$

$$\pi_2 = \pi_1 p_{12} + \pi_2 p_{22} \quad (2)$$

$$* \Rightarrow \quad \pi_1 + \pi_2 = 1 \quad (3)$$

Lös detta med ekvationerna (1) och (3).

$$(3) \Rightarrow \quad \pi_1 = 1 - \pi_2 \quad (4)$$

Stoppa in (4) i (1) och få

$$1 - \pi_2 = (1 - \pi_2) p_{11} + \pi_2 p_{21} = p_{11} + (p_{21} - p_{11}) \pi_2$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1 - p_{11} = (1 + p_{21} - p_{11}) \pi_2 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\pi_2 = \frac{1 - p_{11}}{1 + p_{21} - p_{11}} = \left\{ p_{11} + p_{12} = 1 \Leftrightarrow 1 - p_{11} = p_{12} \right\}$$

$$= \boxed{\frac{p_{12}}{p_{12} + p_{21}}} \quad (5)$$

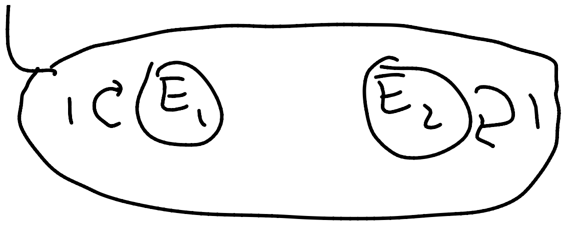
(5) in i (4) ger $\pi_1 = 1 - \frac{p_{12}}{p_{12} + p_{21}} = \frac{p_{12} + p_{21}}{p_{12} + p_{21}} - \frac{p_{12}}{p_{12} + p_{21}}$

$$= \boxed{\frac{p_{21}}{p_{12} + p_{21}}}$$

Sammanfattningsvis:

$$\pi = (\pi_1 \quad \pi_2) = \begin{pmatrix} \frac{p_{21}}{p_{12} + p_{21}} & \frac{p_{12}}{p_{12} + p_{21}} \end{pmatrix}$$ är

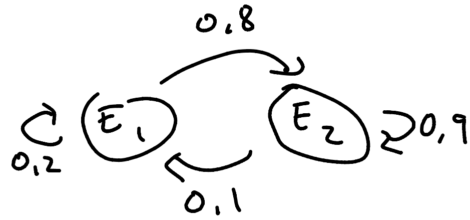
stationär fördelning, såvida inte både p_{12} och $p_{21} = 0$.



Test: Om $P = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}9 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ så blir

$$\pi = \left(\frac{0{,}9}{0{,}9+0{,}9} \quad \frac{0{,}9}{0{,}9+0{,}9} \right) = (0{,}5 \quad 0{,}5)$$

ytterligare ex: $P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$



$$\Longrightarrow \pi = \left(\frac{0{,}1}{0{,}1+0{,}8} \quad \frac{0{,}8}{0{,}1+0{,}8} \right) = \left(\frac{1}{9} \quad \frac{8}{9} \right).$$

Reducibilitet

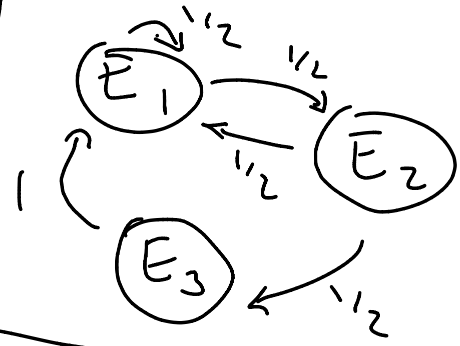
Def: Antag X MK. Vi kallar X irreducibel om det går att ta sig från vilket tillstånd som helst till vilket annat som helst inom ändlig tid. Annars sägs X vara reducibel.

EX 1:

Kedjan reducibel ty, exempelvis om vi startar i E_1 så kan vi aldrig komma till

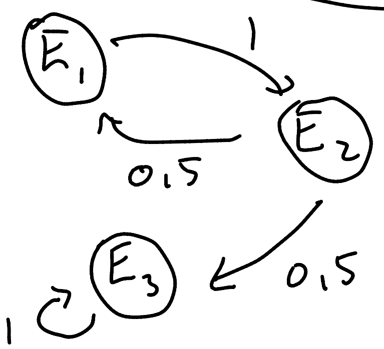
E_3 eller E_4.

EX 2:



Irreducibel

EX 3:



Reducibel, ty E_3 är ett absorberande tillstånd!

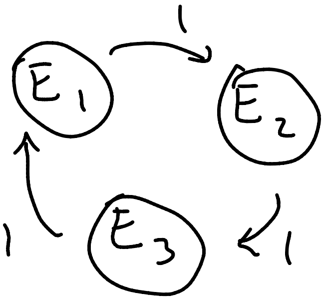
Periodicitet

Def: En MK med k tillstånd sägs vara aperiodisk om det finns ett $N \geq 1$ sådant att

$$\boxed{p_{ii}^{(n)} > 0 \quad \text{för alla } i = 1, \ldots, k \text{ och alla } n \geq N}$$

#

EX:



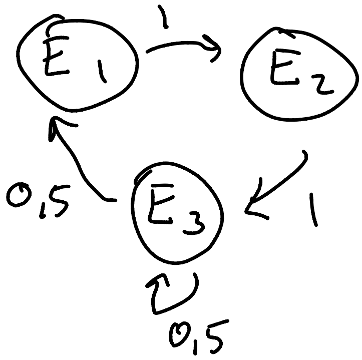
$p_{11}^{(3)} = 1$, $p_{11}^{(6)} = 1$, $p_{11}^{(9)} = 1$ osv...

Så $p_{11}^{(k)} = 1$ om k delbart m. 3.

Men $p_{11}^{(k)} = 0$ om k ej delbart med 3.

så kedjan periodisk!

Ex 2:



Aperiodisk ty $p_{ii}^{(k)} > 0$ för alla $k \geq 3$.