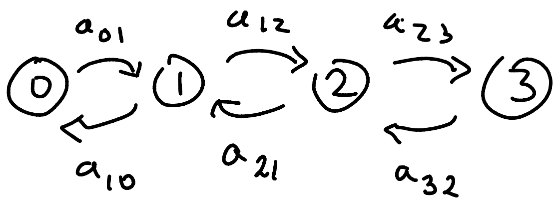
LMA201: Föreläsning 2021-03-02

__Kom ihåg:__ Antag $\underline{X} = (\underline{X}(t))_{t \geq 0}$ är en MK i kontinuerlig tid. $\underline{X}$ beskrivs mha en intensitetsmatris A. Elementen i A betecknas a_{ij}. Om $i \neq j$ står a_{ij} för intensiteten för hopp mellan i och j. $a_{ii} = -$(summan av övriga element i rad i)

__Ex__



__Mekanism:__ Om vi är tex i 2 så väntar vi en slumpmässig tid som är $\text{Exp}(a_{21} + a_{23})$ fördelad. När denna tid inträffar, så hoppar vi till 1 med sannolikhet $\dfrac{a_{21}}{a_{21}+a_{23}}$ och till 3 med sann. $\dfrac{a_{23}}{a_{21}+a_{23}}$ osv...

Stationär fördelning $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_k)$ uppfyller $\pi_0 + \dots + \pi_k = 1$ & $\pi A = 0$.

Kan också använda "snabbmetoden" (se slutet förra föreläsn.)

Exempel: Antag maskin med 3 komponenter, där felintensiteten för varje komponent är $\lambda = \frac{1}{50}$.

Finns 3 reparatörer som vardera jobbar med reparationsintensitet $\mu = \frac{1}{10}$. (tiden till fel är $Exp(\lambda)$)

Låt $X(t)$ = antalet trasiga komp. vid tiden t.

← en MK i kont tid.

Beräkna stat. förd! ①

$\underline{L}$: $\pi = (\pi_0 \ \pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3)$ där $\boxed{\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend left, "3\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "2\lambda"] & 2 \arrow[l, bend left, "2\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda \leftarrow a_{23}"] & 3 \arrow[l, bend left, "3\mu \leftarrow a_{32}"]
\end{tikzcd}$$

Int. matris $A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -3\lambda & 3\lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(\mu+2\lambda) & 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\mu & -(2\mu+\lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & 3\mu & -3\mu \end{pmatrix}$$

Lös sedan $\pi A = 0$

Snabbmetoden: $\pi_1 = \frac{3\lambda}{\mu}\pi_0 = 0{,}6\pi_0$ | $\pi_2 = \frac{3\lambda \cdot 2\lambda}{\mu \cdot 2\mu}\pi_0 = 0{,}12\pi_0$

$$\pi_3 = \frac{3\lambda \cdot 2\lambda \cdot \lambda}{\mu \cdot 2\mu \cdot 3\mu}\pi_0 = 0{,}008\pi_0$$

Insättning i ① ger att $\pi_0 + 0{,}6\pi_0 + 0{,}12\pi_0 + 0{,}008\pi_0$

$= 1{,}728\pi_0 = 1 \Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{1{,}728} \approx 0{,}579$

$\Rightarrow \pi_1 \approx 0{,}6 \cdot 0{,}579 \approx 0{,}347$

$\pi_2 \approx 0{,}069 \qquad \pi_3 \approx 0{,}0046$

Så $\pi \approx (0{,}579 \quad 0{,}347 \quad 0{,}069 \quad 0{,}0046)$

Medeltid till systemfel / absorberande tillstånd

(via uppgift 2,10 & 2.11)

2.10: I ett system finns 2 likadana delar. Felintensitet 0,05 för båda. En är aktiv, den andra reserv. Reserven går in när den aktiva slutar fungera. Systemfel inträffar då båda är sönder. Beräkna förväntad tid till systemfel. (=MTTF)

L: Låt $X(t)$ vara antalet trasiga delar vid tiden t. X är MK i kont. tid med $\Omega = \{0, 1, 2\}$. I detta fall: ② absorberande.

$$0 \xrightarrow{0{,}05} 1 \xrightarrow{0{,}05} 2$$

$$A = \begin{pmatrix} -0{,}05 & 0{,}05 & 0 \\ 0 & -0{,}05 & 0{,}05 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ← rad med bara 0:or svarar mot ett absorberande tillstånd.

Vi startar i ⓪ och skall ta reda på väntevärdet av tiden det tar att nå ②. Låt beteckna denna tid. Söker $E(T)$. Vi ser att

$T = T_1 + T_2$ där T_1 = tiden för hopp mellan ⓪ och ①

T_2 = — " — ① och ②

Vet att både T_1 & T_2 är $Exp(\lambda = 0{,}05)$

Så $MTTF = E(T) = E(T_1 + T_2) =$

$$E(T_1) + E(T_2) = \frac{1}{0{,}05} + \frac{1}{0{,}05} = 20 + 20 = \boxed{40.}$$

Rast t. 14^{15}

2.10 med bolens algoritm:

Metod: 1. Tag A och stryk rader och kolumner som svarar mot absorberande tillstånd.

Här: stryk rad 3 och kolumn 3 så fås

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -0{,}05 & 0{,}05 \\ 0 & -0{,}05 \end{pmatrix}$$

$\tilde{k}$ = k=antalet tillstånd

2. Låt a vara en vektor av längd $(k-1)$ med en -1:a på positionen som

svarar mot starttillståndet, och 0:or på övriga positioner.

ej sannolikheter.

Här: $a=(-1 \quad 0)$ ty vi startar i ⓪

3. Låt $p=(p_0, \ldots, p_{\tilde{k}-1})$. Här $p=(p_0, p_1)$

4. Lös ekvationssystemet $p\tilde{A}=a$ i p

5. MTTF = summan av element i p

Här $MTTF = p_0 + p_1$.

Här fås $p\tilde{A} = (p_0 \quad p_1)\begin{pmatrix} -0{,}05 & 0{,}05 \\ 0 & -0{,}05 \end{pmatrix} =$

$= (-0{,}05p_0 \qquad 0{,}05p_0 - 0{,}05p_1) = (-1 \quad 0) \Longleftrightarrow$

$-0{,}05p_0 = -1 \Rightarrow p_0 = \frac{1}{0{,}05} = 20$

$0{,}05p_0 - 0{,}05p_1 = 0 \Rightarrow p_1 = p_0 = 20$

Så $MTTF = p_0 + p_1 = 20 + 20 = \boxed{40}$.

2.11: Ett system består av två likadana delar som kan arbeta samtidigt. Om båda delarna trasiga så inträffar systemfel. Felintensiteten för respektive komponent är $\lambda = 0{,}005$. En reparatör med reparationsintensitet $\mu = 0{,}1$. Starta med 2 hela delar. Beräkna MTTF!

L: Övergångsgraf för MK $X(t)$ = antalet trasiga delar vid t.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "2\lambda = 0{,}01"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu = 0{,}1"] \arrow[r, bend left, "\lambda = 0{,}005"] & 2 \end{tikzcd}$$

↑ abs. tillstånd.

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}01 & 0{,}01 & 0 \\ 0{,}1 & -0{,}105 & 0{,}005 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 är absorberande $\Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} -0{,}01 & 0{,}01 \\ 0{,}1 & -0{,}105 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -2\lambda & 2\lambda \\ \mu & -(\mu+\lambda) \end{pmatrix}$$

Startar i 0 så $a = (-1, 0)$
och $p = (p_0, p_1)$

Lös $p\tilde{A} = a$:

$$p\tilde{A} = (p_0 \;\; p_1)\begin{pmatrix} -2\lambda & 2\lambda \\ \mu & -(\mu+\lambda) \end{pmatrix} =$$

$$= (-2\lambda p_0 + \mu p_1 \qquad 2\lambda p_0 - (\mu+\lambda)p_1) = (-1 \qquad 0)$$

så
$$-2\lambda p_0 + \mu p_1 = -1 \qquad (1)$$
$$2\lambda p_0 - (\mu+\lambda)p_1 = 0 \qquad (2)$$

$$(1) \Rightarrow -2\lambda p_0 = -1 - \mu p_1 \iff p_0 = \frac{1+\mu p_1}{2\lambda} \qquad (3)$$

(3) in i (2) ger

$$\cancel{2\lambda}\cdot\frac{1+\mu p_1}{\cancel{2\lambda}} - (\mu+\lambda)p_1 = 0 \iff$$

$$1+\mu p_1 - \mu p_1 - \lambda p_1 = 0 \iff 1-\lambda p_1 = 0 \iff$$

$p_1 = \boxed{\frac{1}{\lambda}}$ (4)   (4) in i (3) ger att

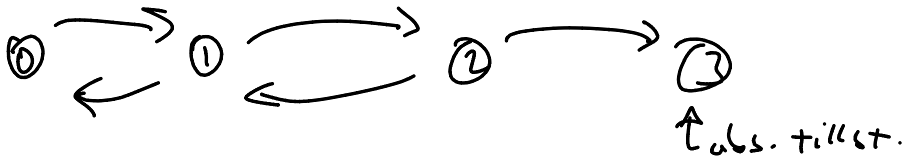
$$p_0 = \frac{1+\mu/\lambda}{2\lambda} = \boxed{\frac{\lambda+\mu}{2\lambda^2}}$$

Så MTTF blir $p_0 + p_1 = \frac{\lambda+\mu}{2\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} = 2300$ tidsenheter.

OBS: om vi startar 1 så är $a = (0\ \ -1)$.

Svar på fråga i chat efter föreläsningen:

EX:



start i från 0 i $a = (-1\ \ 0\ \ 0)$

1 : $a = (0\ \ -1\ \ 0)$

2 : $a = (0\ \ 0\ \ -1)$
