

TMA227/LGMA62 — Övningstenta

Betyg LGMA62. 24p för G, 42p för VG.

Betyg TMA227. 24–35p för trea, 36–47p för fyra, 48–60p för femma.

Inga hjälpmedel tillåtna.

1. (8p) Hitta den allmänna lösningen till

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = 3n - 2.$$

2. (7p) Avgör dimensionen på underrummet $U \subseteq \mathbb{R}^4$, där

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a + b - c \\ b \\ c \\ b + c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

3. (7p) Visa att funktionsserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$$

är likformigt konvergent på $\mathbb{R}$.

4. (8p) Låt $v = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ och definiera

$$U = \{u \in \mathbb{R}^3 : u \perp v\}.$$

(a) (4p) Visa att U är ett underrum till $\mathbb{R}^3$.

(b) (4p) Bestäm avståndet mellan vektorn $w = (2, 0, 1)$ och U .

5. (8p) Antag att V är ett vektorrum, med underrum $U, W \subseteq V$ sådana att $U \cap W = \{\vec{0}\}$.

Låt $u_1, u_2 \in U$ vara linjärt oberoende, och låt $w_1, w_2, w_3 \in W$ vara linjärt oberoende.

Visa att samlingen $\{u_1, u_2, w_1, w_2, w_3\}$ är linjärt oberoende.

6. (8p) Betrakta vektorrummet V av talföljder $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, med addition och skalärmultiplikation definierade på det naturliga viset:

$$\begin{aligned} \{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{b_n\}_{n=1}^{\infty} &= \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}, \\ c\{a_n\}_{n=1}^{\infty} &= \{ca_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Betrakta mängden

$$\ell^2 = \left\{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in V : \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ konvergerar} \right\}.$$

Visa att ℓ^2 är ett underrum till V .

7. (7p) Antag att $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ är en sekvens och x_0 är sådant att $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ är konvergent. Visa att

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

är absolut konvergent för varje $x \in \mathbb{R}$ med $|x| < |x_0|$.

8. (7p) Bevisa att varje ändligtdimensionellt vektorrum har en ON-bas.